

Physik I

Fynn Krebsler—fkrebsler@student.ethz.ch

Herbstsemester 2025

Inhaltsverzeichnis

- 1 Einleitung
- 2 Kinematik des Massenpunktes
- 3 Dynamik des Massenpunktes
- 4 Arbeit und Energie
- 5 Drehbewegungen
- 6 Vielteilchensysteme
- 7 Gravitationstheorie
- 8 Dynamik des starren Körpers
- 9 Schwingungen
- 10 Wärmelehre & Thermodynamik

1 Einleitung

Ziele der Vorlesung sind das Verständnis der Grundbausteine der Natur und ihre grundlegenden Wechselwirkungen. Dies beinhaltet Verständnis der klassischen Mechanik und Thermodynamik. Diese Kenntnisse sollen eingesetzt werden um physikalische Probleme mit mathematischen Werkzeugen zu lösen. Letztlich sollte eine gewisse Intuition für diese Themen entwickelt werden.

Die Vorgehensweise besteht darin, sich ein möglichst einfaches Modell zu nehmen, welches die gesuchten Phänomene beschreibt.

1.1 Physikalische Grössen

Physikalische Grössen bestehen aus Einheit und Zahl. Beispielsweise ist eine Länge $l = 1 \text{ m}$ eine physikalische Grösse. Die Einheit ist essentieller Bestandteil der Grösse. Sie muss immer angegeben werden.

Definition 1.1: Grösse

Eine Grösse kann geschrieben werden als Produkt einer Zahl und einer Einheit.

$$G = \{G\} \cdot [G].$$

Hierbei ist $\{G\}$ der Zahlenwert und $[G]$ die Einheit.

In der Vorlesung wird konsequent das SI-Einheitensystem verwendet.

2 Kinematik des Massenpunktes

- 1 Wir idealisieren im Folgenden Körper als Massenpunkte. Ein Massenpunkt ist ein Punkt, der eine endliche Masse besitzt, aber keine Ausdehnung hat. Die Bewegung eines Teilchens folgt einer geometrischen Bahn Γ . Folglich lässt sich unser Massenpunkt durch einen Ortsvektor beschreiben.

Definition 2.1: Ortsvektor

Der Ortsvektor $\mathbf{r}(t)$ eines Massenpunktes ist der Vektor der vom Ursprung des Koordinatensystems zum Massenpunkt zeigt.

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\hat{\mathbf{e}}_x + y(t)\hat{\mathbf{e}}_y + z(t)\hat{\mathbf{e}}_z.$$

- 12 Die Länge des Ortsvektors, $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, ist der Abstand des Massenpunktes vom Ursprung. Die Richtung des Ortsvektors ist gegeben durch den Einheitsvektor $\mathbf{e}_r = \frac{\vec{r}}{r}$. Die Länge des Einheitsvektors ist immer 1.

Der **VERSCHIEBUNGSVEKTOR** $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(t_2) - \mathbf{r}(t_1)$ beschreibt die Änderung des Ortsvektors zwischen den Zeitpunkten t_1 und t_2 . Im Gegensatz dazu ist der zurückgelegte Weg

$$\Delta s = \int_{\Gamma} \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}.$$

Example 2.2: Kreis

Wir betrachten einen Kreis mit radius r . Auf dem Kreis gilt:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \\ y &= r \sin \varphi \end{aligned}$$

Und somit $\vec{r} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}$

$$d\mathbf{r} = r \begin{pmatrix} -\sin \varphi d\varphi \\ \cos \varphi d\varphi \end{pmatrix}.$$

$$|d\vec{r}| = r \sqrt{\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi} d\varphi = r d\varphi.$$

Für die Weglänge s um den Kreis gilt somit

$$s = \int_0^{2\pi} r d\varphi = 2\pi r.$$

2.1 Geschwindigkeit

Auch die Geschwindigkeit ist ein Vektor.

Die **MITTLERE GESCHWINDIGKEIT** $\langle \vec{v} \rangle$ ist definiert als

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}.$$

Wenn wir nun den Grenzwert $\Delta t \rightarrow 0$ betrachten, so erhalten wir die **MOMENTANE GESCHWINDIGKEIT** \vec{v}

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \langle \vec{v} \rangle = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}(t).$$

Oder in Komponentenform

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix}.$$

2.2 Geradlinig gleichförmige Bewegung

Bei einer geradlinigen gleichförmigen Bewegung in der xz -Ebene gilt

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_x \\ 0 \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \cos \alpha \\ 0 \\ v_0 \sin \alpha \end{pmatrix}.$$

Unter der Annahme, dass der Körper am Ursprung startet, also $\vec{r}(0) = 0$, gilt

$$\vec{r}(t) = \int_0^t \vec{v}(t') dt' = \begin{pmatrix} v_0 t \cos \alpha \\ 0 \\ v_0 t \sin \alpha \end{pmatrix}.$$

2.3 Allgemeine Bewegung

$$v_x(t) = \frac{d}{dt} x(t), \quad \int_{t_0}^t v_x(t') dt' = x(t) - x(t_0).$$

Also ist

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t v_x(t') dt'.$$

$$\int v(t') dt' = \int \frac{d\vec{r}(t')}{dt'} dt' = \int d\vec{r}(t') = \vec{r}(t) - \vec{r}(t_0).$$

Somit ist

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \int_{t_0}^t \vec{v}(t') dt'.$$

2.4 Beschleunigung

$$\vec{a}(t) = \frac{d}{dt} \vec{v}(t) = \ddot{\vec{r}}(t).$$

Betrachten wir konstante Beschleunigung \vec{a} . Sodass $\vec{a}(t) = \vec{a}_0 = \text{konst.}$ Dann gilt

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int_{t_0}^t \vec{a}(t') dt' = \vec{v}(t_0) + \vec{a}_0(t - t_0).$$

Entsprechend gilt für den Ortsvektor

$$\vec{r}(t) = \int_{t_0}^t \vec{v}(t') dt' = \vec{r}(t_0) + \vec{v}(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2} \vec{a}_0(t - t_0)^2.$$

Example 2.3: Der freie Fall

Die z -Achse zeige nach oben. Dann gilt für die Beschleunigung

$$\vec{a}_0 = \vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}.$$

$$\vec{r}(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}(0) = \begin{pmatrix} v_{x0} \\ v_{y0} \\ v_{z0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Folglich ist

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 - \frac{1}{2}gt^2 \end{pmatrix}.$$

Example 2.4: Der schräge Wurf

$$\vec{r}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z_0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}(0) = \begin{pmatrix} v_0 \cos \alpha \\ 0 \\ v_0 \sin \alpha \end{pmatrix}.$$

Also ist

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} v_0 t \cos \alpha \\ 0 \\ z_0 + v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2}gt^2 \end{pmatrix}.$$

Gesucht ist $z(x)$. Für die Zeit t gilt

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}.$$

Somit ist

$$z = z_0 + \tan \alpha \cdot x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2.$$

2.5 Kreisbewegung

Wir verwenden Polarkoordinaten also sind wir in einer Ebene.

$$\rho(t) = r = \text{konst.}$$

Winkel $\varphi(t) = \omega t$. Wobei ω die Winkelgeschwindigkeit ist.

$$x(t) = r \cos(\omega t + \phi_0), \quad y(t) = r \sin(\omega t + \phi_0).$$

Die Geschwindigkeit ist:

$$\vec{v} = r\omega \begin{pmatrix} -\sin(\omega t + \phi_0) \\ \cos(\omega t + \phi_0) \end{pmatrix}.$$

Der Betrag der Geschwindigkeit ist

$$|\vec{v}(t)| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = r\omega.$$

Folglich gilt für $\omega = \text{konst.} \Rightarrow v = \text{konst.}$

Beschleunigung:

$$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = -r\omega^2 \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \end{pmatrix} = -\omega^2 \vec{r}(t).$$

Letzte Gleichung gilt für konstante Winkelbeschleunigung. Man nennt diese Beschleunigung **ZENTRIPETALBESCHLEUNIGUNG**.

Betrachten wir die Beträge: $a(t) = r\omega^2 = \frac{v^2}{r}$.

Die Umlaufzeit T ist: $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Die Umlauffrequenz ν ist $\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$. Gibt an wie viele Umläufe wir pro Zeit haben.

2.5.1 Die Winkelgeschwindigkeit als Vektor

Die Bahngeschwindigkeit $v = \omega\rho$. Hierbei wird ρ als Abstand zur Drehachse bezeichnet. Dies da später auch variable Radien betrachtet werden.

Winkelgeschwindigkeit:

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}.$$

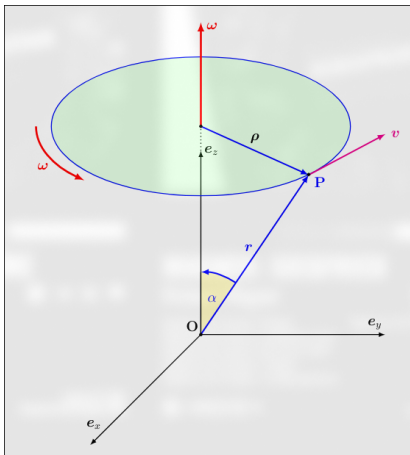


Abbildung 1: Vektorielle Darstellung der Winkelgeschwindigkeit

Mathematik:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}.$$

Für $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \times \mathbf{c}$ gilt:

Theorem 2.5: BAC-CAB-Rule

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}).$$

$\boldsymbol{\rho} \times \mathbf{v} = \boldsymbol{\rho} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}) = \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho}) - \boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\omega}) = \rho^2 \cdot \boldsymbol{\omega}$. Daher ist

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{\rho^2}(\boldsymbol{\rho} \times \mathbf{v}).$$

Wir können ein lokales Koordinatensystem wählen, mit den Vektoren $\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_v, \mathbf{e}_\omega$. Es gilt:

$$\mathbf{e}_v = \mathbf{e}_\omega \times \mathbf{e}_\rho.$$

2.5.2 Winkelbeschleunigung

$$\boldsymbol{\alpha} = \dot{\boldsymbol{\omega}} = \dot{\ddot{\varphi}}.$$

Ortsvektor:

$$\mathbf{r} = r \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}.$$

Für ein konstantes r gilt: Geschwindigkeit:

$$\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t) = r\dot{\varphi} \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix} = r\omega \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Beschleunigung:

$$\mathbf{a}(t) = \dot{\mathbf{v}}(t) = r\ddot{\varphi} \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix} + r\dot{\varphi}^2 \begin{pmatrix} -\cos \varphi \\ -\sin \varphi \end{pmatrix}.$$

Der erste Teil ist parallel zur Geschwindigkeitsrichtung, und wird mit a_{\parallel} bezeichnet. Der zweite Teil ist orthogonal zur Geschwindigkeitsrichtung, und wird mit a_{\perp} bezeichnet.

Beträge:

$$|a_{\parallel}| = r\ddot{\varphi}, \quad |a_{\perp}| = r\dot{\varphi}^2.$$

$$|\mathbf{a}| = r\sqrt{\ddot{\varphi}^2 + \dot{\varphi}^4} = r\sqrt{\alpha^2 + \omega^4}.$$

2.5.3 Allgemeine Beschleunigung

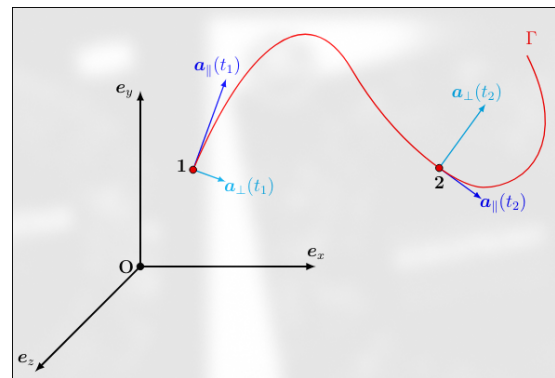


Abbildung 2: Allgemeine Bewegung eines Massenpunktes

$$\mathbf{v}(t) = v(t) \cdot \mathbf{e}_{\parallel}(t).$$

Die Beschleunigung ist:

$$\mathbf{a}(t) = \dot{\mathbf{v}}(t) = \frac{d}{dt}(v(t)\mathbf{e}_{\parallel}(t)) = \dot{v}(t)\mathbf{e}_{\parallel}(t) + v(t)\dot{\mathbf{e}}_{\parallel}(t).$$

$\mathbf{e}_{\parallel}(t)$ ist ein Einheitsvektor, also gilt

$$1 = |\mathbf{e}_{\parallel}(t)|$$

$$1 = \mathbf{e}_{\parallel}(t) \cdot \mathbf{e}_{\parallel}(t) \quad \text{Ableitung nach } t$$

$$0 = \frac{d}{dt}(\mathbf{e}_{\parallel}(t) \cdot \mathbf{e}_{\parallel}(t))$$

$$0 = 2\mathbf{e}_{\parallel}(t) \cdot \dot{\mathbf{e}}_{\parallel}(t) \quad \text{Skalarprod} = 0 \Rightarrow \text{vekt senkr}$$

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{a}_{\parallel}(t) + \mathbf{a}_{\perp}(t)$$

$$\mathbf{a}_{\parallel}(t) = \dot{v}(t)\mathbf{e}_{\parallel}(t) = \dot{v}(t)\mathbf{e}_{\parallel}$$

$$\mathbf{a}(t)_{\perp}(t) = v(t)\dot{\mathbf{e}}_{\parallel}(t)$$

In Abb. 3 ist die Änderung des Einheitsvektors gegeben durch

$$d\varphi = \frac{|a_{\perp}|dt}{v} = \frac{|\dot{\mathbf{e}}_{\parallel}|dt}{|\mathbf{e}_{\parallel}|} = |\dot{\mathbf{e}}_{\parallel}|dt.$$

Sei $\rho(t)$ der **MOMENTANE KRÜMMUNGSRADIUS**

$$\dot{\varphi} = \frac{v(t)}{\rho(t)}.$$

Folglich gilt

$$\mathbf{a}_{\perp}(t) = v(t)\dot{\mathbf{e}}_{\parallel}(t) = v\left(\frac{v}{\rho}\mathbf{e}_{\perp}\right).$$

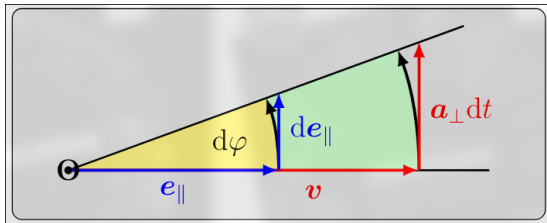


Abbildung 3: Ableitung des Einheitsvektors

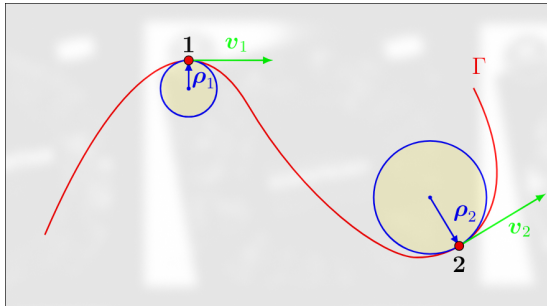


Abbildung 4: Krümmung der Bahnkurve

Theorem 2.6:

$$\mathbf{a}_\perp(t) = \frac{v^2(t)}{\rho(t)} \mathbf{e}_\perp(t).$$

Folglich ist

$$\mathbf{a}(t) = \dot{v} \mathbf{e}_\parallel(t) + \frac{v^2(t)}{\rho(t)} \mathbf{e}_\perp(t).$$

3 Dynamik des Massenpunktes

Nun geht es darum, wie eine Bahnkurve zustande kommt. Zentrale Begriffe sind Impuls und Masse.

3.1 Die Masse

Wir machen ein Rückstossversuch. Sind die Massen m_1

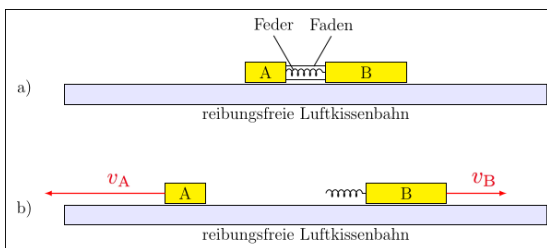


Abbildung 5: Rückstossversuch

und m_2 gleich gross, so gilt $|v_1| = |v_2|$. Sind die Massen unterschiedlich gross, so gilt

$$m_1|v_1| = m_2|v_2|.$$

Dies definiert die "träge Masse". Diese ist gleich der "schweren Masse", welche man mit einer normalen Waage messen würde.

Für die schwere Masse wird stets Gravitation benötigt (statisches Experiment), während die träge Masse eine Geschwindigkeitsänderung benötigt.

3.2 Der Impuls

Aus vorherigem Experiment folgt

$$m_A v_A = m_B v_B.$$

Mit vektoren

$$m_A \mathbf{v}_A + m_B \mathbf{v}_B = 0.$$

Diese Gleichung nennt man die Impulserhaltung.

Definition 3.1: Impuls

Der Impuls \mathbf{p} eines Massenpunktes ist definiert als

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}.$$

Diese Grösse ist eine Erhaltungsgrösse. Es gibt kein Experiment, in dem der Gesamtimpuls nicht erhalten bleibt.

$$\frac{d\mathbf{p}_{\text{ges}}}{dt} = 0.$$

3.3 Impulserhaltung

Sei p_i der Impuls von Massenpunkt m_i , mit Geschwindigkeit \mathbf{v}_i . Wenn wir viele Massenpunkte innerhalb eines abgeschlossenen Systems haben, so gilt

$$\mathbf{p}_{\text{tot}} = \sum_i \mathbf{p}_i = \sum_i m_i \mathbf{v}_i.$$

oder

$$\frac{d\mathbf{p}_{\text{tot}}}{dt} = 0,$$

sofern keine externe Kräfte wirken.

3.4 Das zweite Newton'sche Gesetz

Die zeitliche Änderung des Impulses bewirkt eine Kraft.

Example 3.2:

Betrachten wir einen Massenpunkt auf einer Kreisbahn, dann gilt

$$\mathbf{r}(t) = r \cos(\omega t) \mathbf{e}_x + r \sin(\omega t) \mathbf{e}_y.$$

und

$$\mathbf{v}(t) = -r\omega \sin(\omega t) \mathbf{e}_x + r\omega \cos(\omega t) \mathbf{e}_y.$$

Für den Impuls gilt somit

$$\mathbf{p}(t) = m\mathbf{v}(t) = -mr\omega \sin(\omega t) \mathbf{e}_x + mr\omega \cos(\omega t) \mathbf{e}_y.$$

Der Betrag des Impulses ist konstant $|\mathbf{p}| = mr\omega$.

Definition 3.3: Kraft

Die Kraft \mathbf{F} ist definiert als die zeitliche Änderung des Impulses

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}.$$

Warnung: Das ist keine Definition der Kraft, sondern eine heuristische Beobachtung.

Im Falle, dass die Masse konstant ist, gilt

$$\mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{a}.$$

In obigen Beispiel gilt somit

$$\mathbf{F}(t) = -m\omega^2 \cos(\omega t)\mathbf{e}_x - m\omega^2 \sin(\omega t)\mathbf{e}_y,$$

und zeigt entgegengesetzt der radialen Richtung.

Für mehrere Kräfte:

$$\mathbf{F} = \sum_i \mathbf{F}_i.$$

3.4.1 Kraftstoss

Wir definieren

$$\int_{t_a}^{t_e} \dot{\mathbf{p}} dt = \mathbf{p}_e - \mathbf{p}_a = \int_{t_a}^{t_e} \mathbf{F}_{\text{ext}} dt.$$

Was zählt ist nicht wie stark die Kraft zu einem Zeitpunkt ist, sondern wie gross das Integral über die Kraft ist.

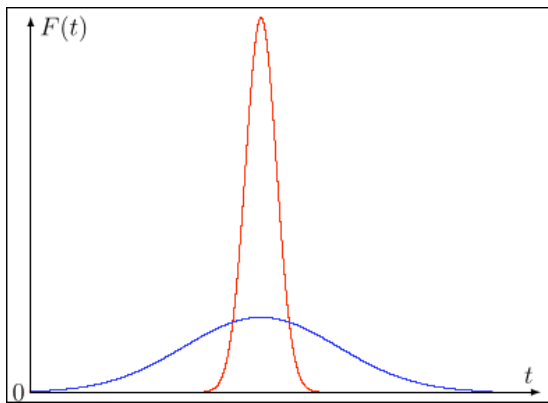


Abbildung 6: Kraftstoss

Schiessen wir eine Kugel auf eine Wand, gibt es mehrere Möglichkeiten. Nehmen wir an, wir haben eine weiche Wand, so dass die Kugel von der Wand aufgenommen wird. Folglich wird der gesamte Impuls des Massenpunktes auf die Wand übertragen.

3.4.2 Kraft und Beschleunigung

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{a}(t).$$

$$\mathbf{a}(t) = \frac{1}{m} \mathbf{F}(t).$$

3.5 Erstes Newton'sches Gesetz

Wir gehen davon aus $\mathbf{p}_{\text{tot}} = \text{konst.} \Rightarrow \frac{d\mathbf{p}_{\text{tot}}}{dt} = 0$. Dies impliziert

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 0 \Rightarrow \mathbf{v} = \text{konst.}$$

Falls keine externe Kraft auf einen Massenpunkt wirkt, so bewegt er sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit.

Ein System in welchem das erste Newton'sche Gesetz gilt, heisst **INERTIALSYSTEM**.

3.6 Das 3. Newton'sche Gesetz

actio = reactio. Wir haben zwei Körper, keine externen Kräfte.

Jede Kraft, welche Massenpunkt 1 auf Massenpunkt 2 ausübt, führt zu einer umgekehrten Kraft, welche Massenpunkt 2 auf Massenpunkt 1 ausübt.

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}.$$

Dies kommt davon dass $\mathbf{p}_{\text{tot}} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \text{konst.}$ folglich

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{p}_{\text{tot}}}{dt} &= \frac{d\mathbf{p}_1}{dt} + \frac{d\mathbf{p}_2}{dt} = 0 \\ \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{21} &= 0 \\ \mathbf{F}_{12} &= -\mathbf{F}_{21}. \end{aligned}$$

Example 3.4:

Eine Kugel welche auf einem Tisch liegt, wird von der Erde angezogen. Die Kugel drückt mit der Gewichtskraft auf den Tisch. Dies führt zu einer Normalkraft, welche die Kugel wieder nach oben drückt, sodass die Kugel auf dem Tisch liegen bleibt.

3.7 Impuls und Impulserhaltung

Wir haben eine Bahn mit zwei Kugeln mit m_1, m_2 und $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$. Wir haben gelernt dass $\mathbf{p}_{\text{ges}} = \mathbf{p}'_{\text{ges}}$, also

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 &= \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 \\ \Delta\mathbf{p}_1 &= -\Delta\mathbf{p}_2 \\ \Rightarrow \Delta\mathbf{p}_1 + \Delta\mathbf{p}_2 &= 0 \end{aligned}$$

Sei nun $\mathbf{v}_2 = 0$ und $m_1 = m_2$, dann folgt

$$\mathbf{v}'_1 = 0, \quad \mathbf{v}'_2 = \mathbf{v}_1.$$

Ist hingegen $m_1 \geq m_2$, so folgt, dass $\mathbf{v}'_1 \geq 0$. Ähnlich für $m_1 \leq m_2$ folgt $\mathbf{v}'_2 \leq \mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}'_1 \leq 0$.

3.7.1 Raketenantrieb

Eine Rakete besitzt eine gewisse Masse und einen gewissen Impuls.

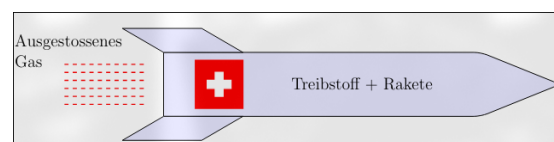


Abbildung 7: Raketenantrieb

Sei $\mathbf{v}(t)$ die Geschwindigkeit der Rakete vom Beobachter. Weiter sei \mathbf{u} die Geschwindigkeit der ausgestossenen Gase relativ zur Rakete. Diese ist konstant. Zuletzt sei $M(t)$ die Masse der Rakete welche abhängig von der Zeit ist.

Impuls der Rakete:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(t) &= M(t)\mathbf{v}(t) \\ \mathbf{p}(t + dt) &= (M - dm)(\mathbf{v} + d\mathbf{v}) + dm(\mathbf{v} - \mathbf{u}) \\ &= M\mathbf{v} + M d\mathbf{v} - \mathbf{v} dm - dm d\mathbf{v} + \mathbf{v} dm - \mathbf{u} dm \\ &= M\mathbf{v} + M d\mathbf{v} - \mathbf{u} dm \quad (\text{da } dm d\mathbf{v} \text{ sehr klein}) \end{aligned}$$

Betrachten wir die Impulsänderung während dt :

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{p}(t + dt) - \mathbf{p}(t) = M d\mathbf{v} - \mathbf{u} dm \\ M d\mathbf{v} &= \mathbf{u} dm \\ M \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \mathbf{u} \frac{dm}{dt}. \end{aligned}$$

Für die Kraft folgt

$$\mathbf{F} = M(t) \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{u} \frac{dm}{dt}.$$

Diese Kraft ist bemerkenswert konstant! Wir formen um

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{u} \frac{1}{M} \frac{dm}{dt}.$$

Da die Rakete Treibstoff verliert, ist $dM = -dm$. Folglich gilt

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t \frac{d\mathbf{v}}{dt'} dt' &= \mathbf{u} \int_{t_0}^t -\frac{1}{M(t')} \frac{dM}{dt'} dt' \\ \mathbf{v}(t) - \mathbf{v}(t_0) &= -\mathbf{u} \int_{M_0}^{M(t)} \frac{1}{M'} dM' \\ &= -\mathbf{u} \left\{ \ln \frac{M_0 - m}{M_0} \right\} \\ \ln \frac{M_0}{M_0 - m} > 1 &\Rightarrow v > u. \end{aligned}$$

3.8 Anwendung der Newton'schen Gesetze

3.8.1 Allgemeiner Ansatz

1. Körper auswählen
2. alle Kräfte auswählen, die wirken
3. Wahl eines Koordinatensystems
4. Newton'sche Gesetze für alle Komponenten aufstellen
5. DGL lösen
6. Anfangsbedingungen => Integrationskonstanten.

3.9 Kontaktkräfte

Kontaktkräfte sind Kräfte, welche ziehen oder drücken.

3.9.1 Körper aufeinander

Insgesamt haben wir 5 Kräfte: Für Block A:

$$\mathbf{F}_A + \mathbf{N}_A = 0.$$

Für Block B:

$$\mathbf{F}_B + \mathbf{N}_B + \mathbf{F}_{AB} = 0.$$

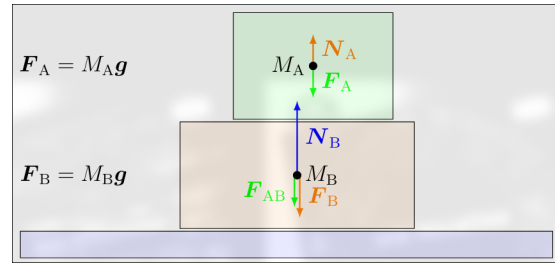


Abbildung 8: Körper aufeinander

Zusammen gilt:

$$\begin{aligned} M_A \mathbf{g} + \mathbf{N}_A &= 0 \\ M_B \mathbf{g} + \mathbf{N}_B - \mathbf{N}_A &= 0 \\ M_B \mathbf{g} + \mathbf{N}_B + M_A \mathbf{g} &= 0 \\ (M_A + M_B) \mathbf{g} + \mathbf{N}_B &= 0 \\ \mathbf{N}_B &= -(M_A + M_B) \mathbf{g}. \end{aligned}$$

3.9.2 Ein hängendes Gewicht

Wir schreiben die Newtonschen Gleichungen für ein statisches System auf. Folglich gilt

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0 \\ \sum F_y &= 0. \end{aligned}$$

Wenn wir die Kräfte auf das Gewicht betrachten, so gilt

$$\begin{aligned} F_{A,x} + F_{B,x} &= 0 \\ F_{A,y} + F_{B,y} - Mg &= 0 \end{aligned}$$

Für die Winkel 30 und 45 Grad gilt

$$\begin{aligned} -\frac{\sqrt{3}}{2} F_A + \frac{\sqrt{2}}{2} F_B &= 0 \\ \frac{1}{2} F_A + \frac{\sqrt{2}}{2} F_B - Mg &= 0. \end{aligned}$$

Somit gilt:

$$F_A = \frac{2Mg}{1 + \sqrt{3}} \quad F_B = \sqrt{\frac{3}{2}} F_A.$$

3.9.3 Federkraft

Die Federkraft ist gegeben durch

$$F = k(x - x_0).$$

Hierbei ist x_0 die Ruhelage der Feder und k die **FEDERKONSTANTE**.

Wenn die Feder ausgelenkt wird, so wirkt die Federkraft der Auslenkung entgegen.

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -k(x - x_0) \\ m\ddot{x} &= -k\xi \frac{d^2\xi(t)}{dt^2} = -\frac{k}{m}\xi(t). \end{aligned}$$

Eine Lösung ist

$$\xi(t) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t).$$

Daraus folgt

$$\ddot{\xi}(t) = -\omega^2 \xi(t) \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Die Randbedingungen sind $x(0) = x_1$ und $\dot{x}(0) = 0$.

Somit folgt $x = x_0 + A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t) = B$ und somit $B = x_1 - x_0$. Ähnlich folgt $\dot{x}(t) = A\omega \cos(\omega t) - B\omega \sin(\omega t)$ und somit $A = 0$.

Die Lösung ist somit $x(t) = x_0 + (x_1 - x_0) \cos(\omega t)$.

3.9.4 Reibungskraft

Die Haftreibung ist gegeben durch $F_R \leq \mu_0 F_N$. Die Kraft F_N ist die Normalkraft.

Example 3.5: Schiefe Ebene

Auf der schiefen Ebene wirkt die Gewichtskraft Mg . Weiter existiert eine Normalkraft F_N , senkrecht auf die Ebene, und eine Reibungskraft F_R , welche der Bewegung entgegen wirkt. Wir berechnen den Winkel bei welchem die Masse zu rutschen beginnt.

$$\text{Horizontal: } F_R \cos(\phi) - F_N \sin(\phi) = 0$$

$$\text{Vertikal: } F_N \cos(\phi) + F_R \sin(\phi) - Mg = 0$$

Wir können die erste Gleichung betrachten und finden

$$\frac{F_R}{F_N} = \tan(\phi) \leq \mu_0.$$

Die Gleitreibung ist $F_R = \mu F_N$

3.10 Bremsweg auf nasser Strasse

Wir nehmen an, dass $F_R = -\kappa \dot{x}$.

Schreiben wir die Newton'schen Gleichungen auf:

$$m\ddot{x} = -\kappa \dot{x}.$$

Nennen wir $\alpha = \frac{\kappa}{m}$, so folgt

$$\dot{v} + \alpha v = 0.$$

Dank separieren der Variablen folgt

$$\int \frac{1}{v} dv = - \int \alpha dt.$$

$$v(t) = v_0 e^{-\alpha(t-t_0)}.$$

Wenn wir weiter $t_0 = 0$ setzen, so folgt

$$v(t) = v_0 e^{-\alpha t}.$$

Weiteres integrieren liefert

$$x(t) = \int_0^t v(t') dt' = v_0 \int_0^t e^{-\alpha t'} dt' = \frac{v_0}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t}).$$

3.11 Kraftfelder

Wir betrachten eine statische Kraft $F(\mathbf{r})$ ohne Zeitabhängigkeit.

3.11.1 Coulombkraft

Lueg mini Elektro Notzie, die sind besser :) (Coulomb, E-Feld...)

3.11.2 Gravitationskraft

$$\mathbf{F}_G(\mathbf{r}) = -G \frac{mM}{r^2} \hat{\mathbf{r}}.$$

Wir können das Gravitationsfeld definieren als

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{F}_G(\mathbf{r})}{m} = -G \frac{M}{r^2} \hat{\mathbf{r}}.$$

Von Newton wissen wir, dass

$$m\mathbf{a}_m = -G_N \frac{mM}{r^2} \hat{\mathbf{r}}.$$

Wir können dies umformen zu

$$\mathbf{a}_m = -G_N \frac{M}{r^2} \hat{\mathbf{r}} = \mathbf{g}(r).$$

Gemäss Newton 3 gilt auch $\mathbf{F}_m = -\mathbf{F}_M$. Wir merken, dass

$$\frac{\mathbf{a}_M}{\mathbf{a}_m} = \frac{m}{M} \ll 1.$$

Auf der Erdoberfläche gilt

$$g(h) \approx g \left(1 - \frac{2h}{R_E}\right).$$

Wenn sich ein Körper in Ruhe befindet, so ist $\mathbf{a} = 0$ und somit $\sum \mathbf{F}_i = \mathbf{F}_G + \mathbf{F}_N = 0$. Folglich gilt

$$\mathbf{F}_N = -\mathbf{F}_G.$$

Example 3.6: Aufzug

a) Aufzug fährt los mit Beschleunigung a .

$$\begin{aligned} -mg + F_N &= ma_A \\ \Rightarrow F_N &= m(g + a_A) > mg. \end{aligned}$$

b) Aufzug bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit.

$$\begin{aligned} -mg + F_N &= 0 \\ \Rightarrow F_N &= mg. \end{aligned}$$

c) Aufzug wird gebremst, $\Rightarrow a_A < 0$.

$$F_N = m(g + a_A) < mg.$$

Example 3.7: Raumschiff

Eine Astronatin befindet sich in einem Raumschiff, welches um die Erde kreist.

$$\begin{aligned} m_A \mathbf{a}_A &= m_A \mathbf{g} + \mathbf{F}_N \\ m_R \mathbf{a}_R &= m_R \mathbf{g} - \mathbf{F}_N \\ (m_A + m_R) \mathbf{g} &= m_A \mathbf{a}_A + m_R \mathbf{a}_R. \end{aligned}$$

Bezugssystem: alle Beschleunigungen betrachtet von der Erde aus.

Unter der Annahme, Raumschiff + Astronautin bewegen sich zusammen folgt:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_R &= \mathbf{a}_A = \mathbf{a} \\ m_A \mathbf{a} &= m_A \mathbf{g} = m_A \mathbf{g} + \mathbf{F}_N \Rightarrow \mathbf{F}_N = 0. \end{aligned}$$

Auf einer kreisförmigen Umlaufbahn gilt

$$a_R = a_A = \frac{v^2}{r}.$$

Schwerelosigkeit heisst also, dass keine Normalkraft wirkt.

Example 3.8: Erdrotation

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_G + \mathbf{F}_N &= \mathbf{F}_{ZP}. \\ \mathbf{F}_{ZP} &= m \mathbf{a}_{ZP} = \frac{mv^2}{r} \hat{\mathbf{e}}_x. \\ r &= R_E \cos(\phi) \Rightarrow v = 2\pi \frac{r}{T}. \\ a_{ZP} &= 0.034 \cos(\phi) \frac{m}{s^2}. \end{aligned}$$

Am Nordpol herrscht somit keine Zentripetalkraft, am Äquator $a_{ZP} = 0.034 \frac{m}{s^2}$.

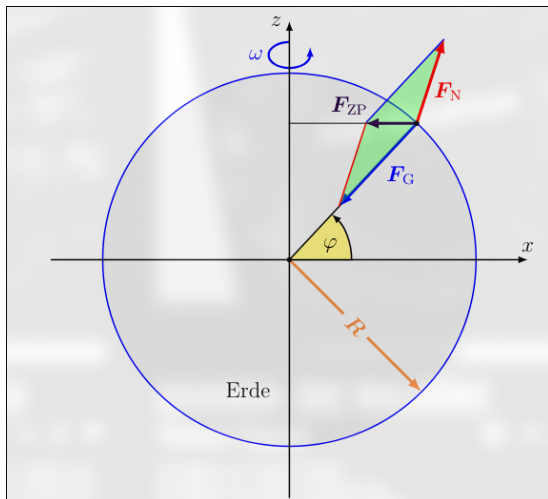


Abbildung 9: Erdrotation

Komponentenweise gilt

$$\begin{pmatrix} F_{Nx} \\ 0 \\ F_{Nz} \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} g \cos(\phi) - a_{ZP} \\ 0 \\ g \sin(\phi) \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} |F_N| &= mg \sqrt{1 - 2 \frac{a_{ZP}}{g} \cos(\phi) + \left(\frac{a_{ZP}}{g}\right)^2} \\ &\approx mg \left(1 - \frac{a_{ZP}}{g} \cos(\phi)\right). \end{aligned}$$

3.12 Beschleunigte Bezugssysteme

Wir betrachten ein Koordinatensystem mit x, y und z -Richtung und Einheitsvektoren $\hat{\mathbf{e}}_x, \hat{\mathbf{e}}_y, \hat{\mathbf{e}}_z$. Ein zweites Bezugssystem K' hat den Ursprung bei $\mathbf{R}(t)$ in K , und rotiert potentiell mit der Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}(t)$. Um den Ursprung von K'

Folglich ist

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= x' \hat{\mathbf{e}}'_x + y' \hat{\mathbf{e}}'_y + z' \hat{\mathbf{e}}'_z \\ \mathbf{v}' &= \dot{x}' \hat{\mathbf{e}}'_x + \dot{y}' \hat{\mathbf{e}}'_y + \dot{z}' \hat{\mathbf{e}}'_z \\ \mathbf{a}' &= \ddot{x}' \hat{\mathbf{e}}'_x + \ddot{y}' \hat{\mathbf{e}}'_y + \ddot{z}' \hat{\mathbf{e}}'_z. \end{aligned}$$

3.12.1 Geschwindigkeit

Wir schreiben $\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{r}'$. Folglich gilt

$$\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{R}} + \dot{\mathbf{r}}'.$$

Interessant ist $\dot{\mathbf{r}}'$. Wir schreiben

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}' &= \frac{d}{dt} (x' \hat{\mathbf{e}}'_x + y' \hat{\mathbf{e}}'_y + z' \hat{\mathbf{e}}'_z) \\ &= \dot{x}' \hat{\mathbf{e}}'_x + x' \dot{\hat{\mathbf{e}}}'_x + \dot{y}' \hat{\mathbf{e}}'_y + y' \dot{\hat{\mathbf{e}}}'_y + \dot{z}' \hat{\mathbf{e}}'_z + z' \dot{\hat{\mathbf{e}}}'_z \\ &= \dot{x}' \hat{\mathbf{e}}'_x + \dot{y}' \hat{\mathbf{e}}'_y + \dot{z}' \hat{\mathbf{e}}'_z + \mathbf{x} \dot{\hat{\mathbf{e}}}'_x + \mathbf{y} \dot{\hat{\mathbf{e}}}'_y + \mathbf{z} \dot{\hat{\mathbf{e}}}'_z \\ &= \mathbf{v}' + \mathbf{u}. \end{aligned}$$

Wie wir bereits hergeleitet haben, gilt

$$\dot{\hat{\mathbf{e}}}'_{\parallel} = \boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{e}}'_{\parallel}.$$

Folglich gilt für \mathbf{u} :

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= x' \dot{\hat{\mathbf{e}}}'_x + y' \dot{\hat{\mathbf{e}}}'_y + z' \dot{\hat{\mathbf{e}}}'_z \\ &= x' (\boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{e}}'_x) + y' (\boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{e}}'_y) + z' (\boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{e}}'_z) \\ &= \boldsymbol{\omega} \times (x' \hat{\mathbf{e}}'_x + y' \hat{\mathbf{e}}'_y + z' \hat{\mathbf{e}}'_z) \\ &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'. \end{aligned}$$

Folglich ist

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} + \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'.$$

Wobei $\mathbf{V} = \dot{\mathbf{R}}$.

3.12.2 Beschleunigung

Gleiche Aktion wie vorher

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \dot{\mathbf{V}} + \dot{\mathbf{v}}' + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}'.$$

Wobei wir annehmen, dass $\boldsymbol{\omega}$ zeitlich konstant ist.

Wir berechnen $\dot{\mathbf{v}}'$:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{v}}' &= \frac{d}{dt} (\dot{x}' \hat{\mathbf{e}}'_x + \dot{y}' \hat{\mathbf{e}}'_y + \dot{z}' \hat{\mathbf{e}}'_z + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') \\ &= \ddot{x}' \hat{\mathbf{e}}'_x + \dot{x}' \dot{\hat{\mathbf{e}}}'_x + \ddot{y}' \hat{\mathbf{e}}'_y + \dot{y}' \dot{\hat{\mathbf{e}}}'_y + \ddot{z}' \hat{\mathbf{e}}'_z + \dot{z}' \dot{\hat{\mathbf{e}}}'_z + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}' \\ &= \mathbf{a}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'. \end{aligned}$$

Für den letzten Term gilt

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}' &= \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') \\ &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}').\end{aligned}$$

Insgesamt gilt somit

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + \mathbf{A} + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}').$$

Wobei $\mathbf{A} = \ddot{\mathbf{V}}$ die Beschleunigung des Ursprungs von K' in K ist.

Zusammenfassend:

- \mathbf{A} : Beschleunigung von O' bezüglich O .
- \mathbf{a}' : Beschleunigung von m in K' .
- $\mathbf{a}_c := -2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'$: Rotation von K' , **CORIOLISBESCHLEUNIGUNG**.
- $\mathbf{a}_{ZP} := \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')$: Rotation von K' , **ZENTRIPETALBESCHLEUNIGUNG**.

3.12.3 Scheinkräfte

In einem Inertialsystem gilt $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. In einem rotierenden Koordinatensystem gilt dann, unter der Annahme, dass die Masse nicht Koordinatensystemabhängig ist:

$$\mathbf{F}' = m \cdot \mathbf{a}'.$$

Sinnvollerweise soll $\mathbf{F}' = \mathbf{F} = m\mathbf{a}$ gelten. Folglich gilt

$$\begin{aligned}m\mathbf{a} &= m(\mathbf{a}' + \mathbf{A} + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')) \\ m\mathbf{a}' &= \mathbf{F}' + (-m\mathbf{A}) + (-2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}') + (-m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')) \\ &= \mathbf{F}' + \mathbf{F}_T + \mathbf{F}_C + \mathbf{F}_{ZF}.\end{aligned}$$

Weiter folgt:

$$\mathbf{a}' = 0 \Rightarrow \mathbf{v}' = \text{const.}$$

Es kann also Kräfte geben, obwohl sich das Teilchen im System nicht bewegt.

3.12.4 "Echte" Kräfte und Beschleunigungen

Wir bezeichnen **ECHTE KRÄFTE** als Kräfte, welche unabhängig vom Bezugssystem sind.

Im Inertialsystem gilt $\mathbf{a}_e = \mathbf{a}$. Im beschleunigten System gilt

$$\sum \mathbf{F}_i = m\mathbf{a}' - m\mathbf{a}_T - m\mathbf{a}_C - m\mathbf{a}_{ZF}.$$

Als Beispiel dazu, betrachten wir einen fallenden Aufzug. In ihm ist $\mathbf{v}' = 0$. Die echten Kräfte sind $\mathbf{F}_G = m\mathbf{g}$. Das System beschleunigt mit $\mathbf{A} = \mathbf{g}$, folglich gilt

$$\mathbf{F}_e = m\mathbf{g} = m\mathbf{a}' + m\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{a}' = 0.$$

3.12.5 Corioliseffekt auf der Erde

Für die Coriolisbeschleunigung gilt

$$\frac{\mathbf{F}_C}{m} = \mathbf{a}_C = -2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = 2\omega v \times \boldsymbol{\omega}.$$

Dies wollen wir nun auf das Foucault Pendel anwenden.

$$\mathbf{a}_C = 2\mathbf{v}' \times (\boldsymbol{\omega}_\perp + \boldsymbol{\omega}_\parallel) = 2\mathbf{v}' \times \boldsymbol{\omega}_\perp.$$

Folglich gilt

$$|\mathbf{a}_C| = 2\omega_\perp v' = 2v' \omega \sin(\phi).$$

Die Coriolisbeschleunigung zeigt hierbei in Richtung der Erdrotation. Wir bezeichnen mit $\Delta x'$ die Verschiebung pro Pendelschwingung.

4 Arbeit und Energie

4.1 Vektoranalysis

Ein **SKALARFELD** ist eine Funktion $U : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Diese Funktion kann man nach x, y, z ableiten.

Ein **VEKTORFELD** ist eine Funktion $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Man kann den **NABLA-OPERATOR** ∇ definieren als

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

Nun definieren wir den **GRADIENTEN** eines Skalarfeldes als

$$\nabla U = \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial y} \\ \frac{\partial U}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

Der Gradient zeigt in Richtung des stärksten Anstiegs von U . Die Grösse des Gradienten ist die Steigung in diese Richtung.

Die **DIVERGENZ** ist $\nabla \cdot \mathbf{v}$ und ist definiert als

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}.$$

Das Ergebnis ist ein Skalarfeld.

Die **ROTATION** ist $\nabla \times \mathbf{v}$ und ist definiert als

$$\nabla \times \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} v_z - \frac{\partial}{\partial z} v_y \\ \frac{\partial}{\partial z} v_x - \frac{\partial}{\partial x} v_z \\ \frac{\partial}{\partial x} v_y - \frac{\partial}{\partial y} v_x \end{pmatrix}.$$

Theorem 4.1: Satz von Gauss

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{v} dV = \oiint_{\partial V} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}.$$

Theorem 4.2: Satz von Stokes

$$\iint_A \nabla \times \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} = \oint_{\partial A} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s}.$$

Example 4.3:

Annahme: $v(\mathbf{r}) = A \cdot \mathbf{r}$ Kugel:

$$\begin{aligned} \iint_{\partial V} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} &= \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{v} dV \\ &= Ar \iint_{\partial V} dA \\ &= 4\pi R^3 A. \end{aligned}$$

Ähnlich können wir die Divergenz berechnen:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{v} &= \frac{\partial}{\partial x}(Ax) + \frac{\partial}{\partial y}(Ay) + \frac{\partial}{\partial z}(Az) \\ &= 3A. \end{aligned}$$

Integrieren wir dies über das Volumen der Kugel, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{v} dV &= 3A \iiint_V dV \\ &= 3A \frac{4\pi R^3}{3} \\ &= 4\pi R^3 A. \end{aligned}$$

Example 4.4:

Sei $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \frac{A}{r^2} \mathbf{e}_r$. Das selbe wie vorher, wir betrachten erneut eine Kugel.

$$\begin{aligned} \oiint_{\partial V} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{A} &= \oiint_{\partial V} \frac{A}{R^2} \mathbf{e}_r \cdot d\mathbf{A} \\ &= \frac{A}{R^2} \oiint_{\partial V} dA \\ &= 4\pi A. \end{aligned}$$

Für die Divergenz berechnen wir

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{u} &= \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ &= A \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{r^3} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{y}{r^3} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{z}{r^3} \right) \\ &= A \left(\frac{1}{r^3} - \frac{3x^2}{r^5} + \frac{1}{r^3} - \frac{3y^2}{r^5} + \frac{1}{r^3} - \frac{3z^2}{r^5} \right) \\ &= A \left(\frac{3}{r^3} - \frac{3r^2}{r^5} \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Wir wissen dass $\nabla \cdot \mathbf{u} = 4\pi\delta(\mathbf{r})$.

Folglich gilt

$$\begin{aligned} \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{u} dV &= A \iiint_V 4\pi\delta(\mathbf{r}) dV \\ &= 4\pi A \iiint_V \delta(\mathbf{r}) dV \\ &= 4\pi A. \end{aligned}$$

4.2 Arbeit, Leistung

Gegeben sei ein Massenpunkt m auf den eine Kraft \mathbf{F} wirkt.

Definition 4.5: Arbeit

Die **ARBEIT** die von der Kraft \mathbf{F} entlang eines Weges C verrichtet wird ist

$$W = \int_{\mathbf{r}_1(\Gamma)}^{\mathbf{r}_2(\Gamma)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}.$$

Wir können die Arbeit dW auch schreiben als

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = F_{\parallel} ds = F \cos(\alpha) ds.$$

Example 4.6: gleichförmige Kreisbewegung

Es wirkt die Zentripetalkraft $\mathbf{F} = -m\frac{v^2}{R}\mathbf{e}_r$. Das ds ist gegeben durch $ds = v dt \perp \mathbf{F}$. Folglich gilt

$$W = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0.$$

4.2.1 Leistung

Die Leistung ist definiert als

Definition 4.7: Leistung

Die Leistung ist die Arbeit pro Zeit

$$P = \frac{dW}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}.$$

4.3 Kinetische Energie

Unter Annahme, dass die Masse konstant ist, gilt

$$W = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = m \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot d\mathbf{r} = m \int_{t_1}^{t_2} \dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} dt.$$

Folglich gilt

$$W = m \int_{\mathbf{v}_1}^{\mathbf{v}_2} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} = \frac{m}{2}(v_2^2 - v_1^2) = \frac{m}{2}v_2^2 - \frac{m}{2}v_1^2.$$

Dies motiviert die folgende Definition:

Definition 4.8: Kinetische Energie

Die **KINETISCHE ENERGIE** eines Massenpunktes ist definiert als

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}.$$

Folglich gilt für die Arbeit

$$W = T(\mathbf{v}_2) - T(\mathbf{v}_1) = \Delta T.$$

4.4 Potentielle Energie und konservative Kräfte

Gegeben sei $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ ein Kraftfeld. Gibt es ein $U(\mathbf{r})$ so dass $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla U(\mathbf{r})$, so nennen wir \mathbf{F} eine **KONSERVATIVE KRAFT** und U das zugehörige **POTENTIAL**.

Für die Arbeit gilt dann

$$W = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathbf{r}_2}^{\mathbf{r}_1} \nabla U \cdot d\mathbf{r} = U(\mathbf{r}_1) - U(\mathbf{r}_2) = -\Delta U.$$

Folglich ist die geleistete Arbeit unabhängig vom Weg, nur die Anfangs- und Endpunkte zählen.

Die Wegunabhängigkeit der Arbeit in einem Kraftfeld ist gegeben durch

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \oint_C (\nabla U) \cdot d\mathbf{r} = - \iint_A (\nabla \times \nabla U) \cdot d\mathbf{A} = 0.$$

Im allgemeinen gilt für ein ein Skalarfeld folgendes:

Theorem 4.9:

Für jedes Skalarfeld $U(\mathbf{r})$ gilt

$$\nabla \times \nabla U = 0.$$

Bemerkung: Wenn U ein Potential von \mathbf{F} ist, so gilt, dass $U + \text{const}$ auch ein Potential für \mathbf{F} .

Folglich ist U abhängig von der Wahl des Nullpunkts.

Definition 4.10: Potentielle Energie

Die **POTENTIELLE ENERGIE** eines Massenpunktes in einem konservativen Kraftfeld ist definiert als

$$U(\mathbf{r}) = - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}'.$$

Wobei \mathbf{r}_0 der Nullpunkt der potentiellen Energie ist.

Die geleistete Arbeit ist somit

$$W = -\Delta U.$$

Für die potentielle Energie des Zentralfeldes gilt

Theorem 4.11: Gravitationspotential

Das Gravitationspotential eines Massenpunktes M ist

$$U(\mathbf{r}) = -G \frac{mM}{r} + U_0.$$

Wobei G die Gravitationskonstante ist.

U_0 wird so gewählt, dass $U(r \rightarrow \infty) = 0$. Folglich ist $U_0 = 0$.

Wenn wir die Kraft berechnen, so gilt

$$\mathbf{F} = -\nabla U = -GmM \nabla \left(\frac{1}{r} \right) = -G \frac{mM}{r^2} \mathbf{e}_r.$$

Wann ist ein Kraftfeld konservativ?

Theorem 4.12:

Ein Kraftfeld $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ ist konservativ, wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

- $\exists U(\mathbf{r}) : \mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla U(\mathbf{r})$
- $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ für jeden geschlossenen Weg C .
- $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ in einem einfach zusammenhängenden Gebiet.

4.5 Energieerhaltung

Wir kombinieren die Arbeit- und Energiebegriffe für potentielle und kinetische Energie:

$$W = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = U(\mathbf{r}_1) - U(\mathbf{r}_2).$$

Anders geschrieben:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + U(\mathbf{r}_1) = \frac{1}{2}mv_2^2 + U(\mathbf{r}_2) = E_{\text{ges}}.$$

Wenn ein Massepunkt ruht, dann wirkt auf ihn keine resultierende Kraft. Folglich ist die potentielle Energie an diesem Punkt extremal.

Für ein system, welches beschrieben wird durch

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = \gamma \mathbf{f}(\mathbf{r}, t),$$

wird f als **SPEZIFISCHE KRAFT** bezeichnet. Das dazugehörige Potential wird als **SPEZIFISCHES POTENTIAL** bezeichnet:

$$U(\mathbf{r}, t) = \gamma V(\mathbf{r}, t).$$

Falls in einem System konservative Kräfte F_K und nicht-konservative Kräfte F_{NK} wirken, so gilt

$$W = \underbrace{\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F}_K \cdot d\mathbf{r}}_{=-\Delta U} + \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F}_{NK} \cdot d\mathbf{r} = \underbrace{T_2 - T_1}_{=\Delta T}.$$

Folglich ist der Energieverlust durch nicht-konservative Kräfte

$$\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F}_{NK} \cdot d\mathbf{r} = \Delta T + \Delta U = \Delta E_{\text{ges}}.$$

4.6 Beispiel: Eindimensionaler Stoss

Gegeben sind zwei Massenpunkte m_1 und m_2 mit v_1 und $v_2 = 0$. Wir betrachten einen elastischen Stoss.



Abbildung 10: Vor dem Stoss

Diese Situation wird durch Impuls- und Energieerhaltung beschrieben:

$$m_1 v_1 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \quad (\text{Impulserhaltung})$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 \quad (\text{Energieerhaltung}).$$

Lösen der Gleichungen liefert

$$v_2' = \frac{2v_1 m_2 m_1}{m_1 m_2 + m_2^2} = 2v_1 \frac{1}{1 + \frac{m_2}{m_1}}.$$

Und Ähnlich

$$v_1' = v_1 \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}.$$

Im Spezialfall $m_1 = m_2$ folgt $v_2' = v_1$ und $v_1' = 0$.

5 Drehbewegungen

Wir haben einen Massenpunkt m auf einer Kreisbahn mit Radius r und tangentialer Geschwindigkeit v .

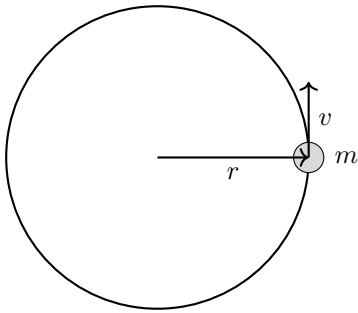


Abbildung 11: Massenpunkt auf Kreisbahn

5.1 Drehimpuls

Wir definieren den **DREHIMPULS** \mathbf{L} als

Definition 5.1:

Der **DREHIMPULS** eines Massenpunktes ist definiert als

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = m(\mathbf{r} \times \mathbf{v}).$$

Die zeitliche Ableitung des Drehimpulses ist die Frage nach einer Erhaltungsgrösse.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{L}} &= \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}} \\ &= \frac{\mathbf{v}m}{m} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}} = \frac{1}{m} \underbrace{\mathbf{p} \times \mathbf{p}}_{=0} + \mathbf{r} \times \mathbf{F} \\ &= \mathbf{r} \times \mathbf{F}. \end{aligned}$$

Diese neue grösse definieren wir als **DREHMOMENT**:

Definition 5.2: Drehmoment

Das **DREHMOMENT** ist definiert als

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}.$$

5.1.1 Drehimpuls bei Kreisbewegung

Wir wissen, dass $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$. Folglich gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= m\mathbf{r} \times \mathbf{v} = m\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \\ &= m(\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega})) \\ &= mr^2\boldsymbol{\omega} \quad (\text{da } \mathbf{r} \perp \boldsymbol{\omega}). \end{aligned}$$

5.1.2 Geometrische Interpretation der Drehimpulserhaltung

Wir fragen uns welche Fläche der Vektor \mathbf{L} beschreibt.

$$\begin{aligned} d\mathbf{A} &= \frac{1}{2}(\mathbf{r} \times (\mathbf{r} + d\mathbf{r})) = \frac{1}{2}(\mathbf{r} \times d\mathbf{r}) \\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{r} \times \mathbf{v}dt) = \frac{1}{2m}\mathbf{L}dt. \end{aligned}$$

Folglich gilt $\dot{\mathbf{A}} = \frac{1}{2m}\mathbf{L}$.

Physikalisch sind Drehmoment und Drehimpuls **AXIALE VEKTOREN**, d.h. sie ändern ihr Vorzeichen nicht bei Spiegelung des Koordinatensystems am Ursprung.

5.2 Energie bei Drehbewegungen

Wir betrachten wieder einen Massenpunkt m auf einer Kreisbahn mit Radius r und tangentialer Geschwindigkeit v . Es gilt

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mr^2\omega^2.$$

Für den Drehimpuls gilt

$$L = rp = rmv = \omega mr^2.$$

Folglich können wir die kinetische Energie auch schreiben als

$$T = \frac{L^2}{2mr^2}.$$

Die Grösse mr^2 wird als **TRÄGHEITSMOMENT** bezeichnet und wird später eine wichtige Rolle spielen.

6 Vielteilchensysteme

Gegeben sei ein System von N Massenpunkten mit Massen m_i und Positionen \mathbf{r}_i . Für $m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{k \neq i} \mathbf{F}_{ik} + \mathbf{F}_i^{\text{ext}}$

Summieren wir über alle Teilchen:

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{i=1}^N \sum_{k \neq i} \mathbf{F}_{ik} + \underbrace{\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{\text{ext}}}_{\mathbf{F}_{\text{ext}}}.$$

Durch Actio = Reactio gilt $\mathbf{F}_{ik} = -\mathbf{F}_{ki}$, folglich heben sich die inneren Kräfte auf:

$$\mathbf{F}_{\text{ext}} = \frac{d^2}{dt^2} \left(\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i \right).$$

Die Gesamtmasse ist $m_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^N m_i$.

Es gilt also

$$\mathbf{F}_{\text{ext}} = \frac{d^2}{dt^2} \left(m_{\text{tot}} \frac{\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} \right).$$

Wir definieren den **SCHWERPUNKT** als

$$\mathbf{r}_S = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i}.$$

Die Bewegungsgleichung für den Schwerpunkt lautet also

$$m_{\text{tot}} \ddot{\mathbf{r}}_S = \mathbf{F}_{\text{ext}}.$$

6.1 Labor- und Schwerpunktsystem

Das **SCHWERPUNKTSYSTEM** ist definiert als das Koordinatensystem, in dem der Schwerpunkt ruht, also $\mathbf{r}_S = 0$.

Es sei nun $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_S + \mathbf{r}_i^*$.

Es gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_S &= \frac{1}{m_{\text{tot}}} \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{r}_S + \mathbf{r}_i^*) \\ &= \mathbf{r}_S + \frac{1}{m_{\text{tot}}} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i^* \\ 0 &= \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i^*. \end{aligned}$$

Für das Drehmoment durch die Schwerkraft gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \mathbf{M}_i &= \sum_{i=1}^N (\mathbf{r}_i^* \times \mathbf{F}_i) \\ &= \left(\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i^* \right) \times \mathbf{g} = 0. \end{aligned}$$

6.2 Linear- und Drehbewegung

Für die Geschwindigkeit eines Massenpunktes im Laborsystem gilt:

$$\mathbf{v}_i = \dot{\mathbf{r}}_i = \dot{\mathbf{r}}_S + \dot{\mathbf{r}}_i^* = \mathbf{v}_S + \mathbf{v}_i^*.$$

Im Laborsystem gilt für den Impuls:

$$\mathbf{p}_i = m_i \mathbf{v}_i = m_i (\mathbf{v}_S + \mathbf{v}_i^*) = m_i \mathbf{v}_S + \mathbf{p}_i^*.$$

Wir haben gelernt dass

$$\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i^* = 0.$$

Ableiten nach der Zeit liefert

$$\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i^* = \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i^* = 0.$$

Für die Energie im Laborsystem gilt:

$$\begin{aligned} T &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \frac{\mathbf{p}_i^2}{m_i} \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2m_i} (m_i \mathbf{v}_S + \mathbf{p}_i^*)^2 \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2m_i} (m_i^2 v_S^2 + 2m_i \mathbf{v}_S \cdot \mathbf{p}_i^* + \mathbf{p}_i^{*2}) \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{p}_i^{*2}}{2m_i} + \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_S^2 + \mathbf{v}_S \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i^*}_{=0} \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{p}_i^{*2}}{2m_i} + \frac{1}{2} m_{\text{tot}} v_S^2 = T^* + T_S. \end{aligned}$$

Für den Drehimpuls im Laborsystem gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i \\ &= \sum_{i=1}^N (\mathbf{r}_S + \mathbf{r}_i^*) \times (m_i \mathbf{v}_S + \mathbf{p}_i^*) \\ &= \sum_{i=1}^N (\mathbf{r}_S \times m_i \mathbf{v}_S + \mathbf{r}_S \times \mathbf{p}_i^* + \mathbf{r}_i^* \times m_i \mathbf{v}_S + \mathbf{r}_i^* \times \mathbf{p}_i^*) \\ &= \mathbf{r}_S \times m_{\text{tot}} \mathbf{v}_S + \mathbf{r}_S \times \underbrace{\sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i^*}_{=0} + \underbrace{\left(\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i^* \right)}_{=0} \times \mathbf{v}_S \\ &\quad + \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i^* \times \mathbf{p}_i^* \\ &= \mathbf{r}_S \times m_{\text{tot}} \mathbf{v}_S + \mathbf{L}^* \\ &= \mathbf{L}_S + \mathbf{L}^*. \end{aligned}$$

Dabei wird \mathbf{L}^* als **EIGENDREHIMPULS** oder **SPIN** bezeichnet und \mathbf{L}_S als **BAHNDREHIMPULS**.

Betrachten wir das Drehmoment der interagierenden Teilchen. Aufgrund Actio = Reactio folgt, dass dieses Null ist. Es folgt der folgende Satz

Theorem 6.1: Drallsatz

Für ein beliebiges System gilt:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{L} = \mathbf{M}_{\text{ext}}.$$

Für die Gültigkeit des Drallsatzes muss L und M_{ext} bezüglich des gleichen Punktes O .

6.3 Erhaltungssätze für N-Teilchen Systeme

Wir beginnen mit dem Schwerpunktsatz:

$$\frac{d\mathbf{p}_s}{dt} = \sum \mathbf{F}_{\text{ext}} = \mathbf{F}_{\text{ext}}.$$

Für den Impulssatz folgt:

$$\sum_{i=1}^{N_1} \mathbf{p}_i = \sum_{i=1}^{N_2} \mathbf{p}'_i.$$

Für den Drehimpulssatz folgt: Drehmomente, welche von internen Kräfte hervorgerufen wurden, heben sich auf.

Es folgt:

$$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{M}_{\text{ext}}.$$

Der mechanische Energiesatz lautet besagt, dass die gesamte mechanische Energie erhalten bleibt.

$$E_{\text{tot}} = T + U_{\text{int}} + U_{\text{ext}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i^2 + U_{\text{int}} + U_{\text{ext}} = \text{konst.}$$

6.4 Zweiteilchensystem

Als erstes wollen wir uns den Ortsvektor im Schwerpunktsystem anschauen. Für den Ortsvektor des Schwerpunkts gilt:

$$\mathbf{r}_S = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}.$$

Folglich gilt für Teilchen 1 im Schwerpunktsystem:

$$\mathbf{r}_1^* = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_S = \mathbf{r}_1 - \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2).$$

Analog gilt für Teilchen 2:

$$\mathbf{r}_2^* = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_S = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2).$$

Im Spezialfall $m_1 = m_2$ gilt also $\mathbf{r}_1^* = -\mathbf{r}_2^*$.

Für die Geschwindigkeiten im Schwerpunktsystem gilt:

$$\mathbf{v}_1^* = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \underbrace{\dot{\mathbf{r}}_1}_{\mathbf{v}_{12}}.$$

$$\mathbf{v}_2^* = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{v}_{12}.$$

Für den Impuls im Schwerpunktsystem gilt somit:

$$\mathbf{p}_1^* = m_1 \mathbf{v}_1^* = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{v}_{12}$$

$$\mathbf{p}_2^* = m_2 \mathbf{v}_2^* = -\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{v}_{12}.$$

Zur vereinfachten Notation definieren wir die **REDUZIERTER MASSE**

Definition 6.2: Reduzierte Masse

Die **REDUZIERTER MASSE** ist definiert als

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}.$$

Somit gilt auch

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}.$$

6.5 Vom Labor ins Schwerpunktsystem

Das Schwerpunktsystem ist wesentlich einfacher zu behandeln als das Laborsystem. Für die Relative Geschwindigkeit gilt:

$$\mathbf{v}_{12} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = \mathbf{p}_1/m_1 - \mathbf{p}_2/m_2.$$

Somit gilt für den Impuls im Schwerpunktsystem:

$$\mathbf{p}_1^* = \mu \mathbf{v}_{12} = \mu \left(\frac{\mathbf{p}_1}{m_1} - \frac{\mathbf{p}_2}{m_2} \right)$$

$$\mathbf{p}_2^* = -\mu \mathbf{v}_{12} = -\mu \left(\frac{\mathbf{p}_1}{m_1} - \frac{\mathbf{p}_2}{m_2} \right).$$

Wir können nun die Bewegungsgleichungen im Schwerpunktsystem aufstellen.

$$m_1 \dot{\mathbf{v}}_1 = \mathbf{F}_{12}$$

$$m_2 \dot{\mathbf{v}}_2 = \mathbf{F}_21 = -\mathbf{F}_{12}$$

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) = \frac{1}{\mu} \mathbf{F}_{12}$$

$$\mu \dot{\mathbf{v}}_{12} = \mathbf{F}_{12}.$$

Wir haben also mathematisch eine Bewegungsgleichung für ein Teilchen mit Masse μ .

6.6 Beispiele

Ein klassisches Beispiel ist das Mond-Erde System. Sei R der Abstand zwischen Erde und Mond. Dann gilt für den Schwerpunkt:

$$\mathbf{r}_S = \frac{m_E \mathbf{r}_E + m_M \mathbf{r}_M}{m_E + m_M}.$$

Und wir finden für die Positionen im Schwerpunktsystem:

$$r_E = \frac{m_M}{m_E + m_M} R$$

$$r_M = \frac{m_E}{m_E + m_M} R.$$

6.7 Teilchenstöße

Wir erinnern uns an den zentralen zweiteilchenstoss. Folglich findet die Bewegung in einer Dimension statt. Seien die Geschwindigkeiten vor dem Stoss \mathbf{v}_i und nach dem Stoss \mathbf{u}_i .

$$\mathbf{v}_i = \begin{pmatrix} v_i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_i = \begin{pmatrix} u_i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aus Impuls und Energieerhaltung folgt:

$$m_1 v_1 + 0 = m_1 u_1 + m_2 u_2 \quad (\text{Impulserhaltung})$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + 0 = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 \quad (\text{Energieerhaltung}).$$

Lösen der Gleichungen liefert

$$u_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1$$

$$u_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1.$$

Betrachten wir nun einen allgemeinen 2-Teilchen Stoss. Hierbei unterscheidet man zwischen zwei Dingen, der Kinematik und der Dynamik. Wir betrachten dabei den Stoss im Schwerpunktsystem.

Der kinematische Teil beschäftigt sich damit, den Impuls und die Energie abhängig vom Winkel zu bestimmen.

Ohne Spin (= Magnetisches Moment) der Teilchen, findet der gesamte Stossprozess in einer Ebene statt. Folglich genügt ein Streuwinkel θ .

Die Dynamik beschäftigt sich damit, wie viele Streueignisse pro Winkel auftreten. Dies wird mit einer Wahrscheinlichkeitsverteilung $\frac{d\Gamma}{dp}$. Wobei

$$\int \frac{d\Gamma}{dp} dp = 1.$$

Wir wollen uns nun mit den kinematischen Aspekten beschäftigen. Es muss gelten:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_1^* + \mathbf{p}_2^* &= \mathbf{p}_3^* + \mathbf{p}_4^* \\ E_1^* + E_2^* &= E_3^* + E_4^*. \end{aligned}$$

Mögliche weitere interne Prozesse beschreiben wir mit Q , der **WÄRMETÖNUNG**. Folglich wird die Energieerhaltung zu

$$E_1^* + E_2^* = E_3^* + E_4^* - Q.$$

7 Gravitationstheorie

7.1 Newtonsche Gravitationstheorie

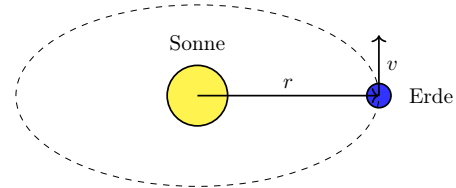
Wir haben bereits gesehen, dass das Gravitationspotential gegeben ist durch

$$U(\mathbf{r}) = -G \frac{m_1 m_2}{r}.$$

Das dazugehörige Kraftfeld ist

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla U(\mathbf{r}) = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}}.$$

7.2 Himmelsmechanik



Wir haben für den Schwerpunkt:

$$\mathbf{s} = \frac{m\mathbf{r} + M\mathbf{R}}{m + M}.$$

Ableiten nach der Zeit zeigt, dass der Schwerpunkt sich mit konstanter Geschwindigkeit bewegt. Folglich betrachten wir die Bewegung im Schwerpunktsystem. Weiter nehmen wir an, dass keine externen Kräfte und Drehmomente wirken.

Wir treffen des weiteren die Annahme, dass $M \gg m$ und $v_m \gg v_M$ (Sonne-Erde System).

Wir wollen nun zeigen, dass die Bahnkurve eine Ellipse ist.

In unserem System gilt Drehimpulserhaltung da kein externes Drehmoment wirkt.

$$\mathbf{L}_{\text{tot}} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = \text{konst.}$$

Dies bedeutet, dass alles auf eine Ebene Senkrecht zu \mathbf{L}_{tot} stattfindet. Wie wir bereits gesehen haben, gilt

$$dA = \frac{1}{2}(\mathbf{r} \times d\mathbf{r}) = \frac{1}{2m}\mathbf{L}_{\text{tot}} dt.$$

Folglich ist die Flächengeschwindigkeit \dot{A} konstant. Dies ist das zweite Keplersche Gesetz.

Theorem 7.1: Zweites Keplersches Gesetz

Der Fahrstrahl des Planeten überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.

Die Bewegungsgleichung benötigt zuerst zwei Koordinaten.

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi = r(t) \cos \varphi(t) \\ y &= r \sin \varphi = r(t) \sin \varphi(t). \end{aligned}$$

Für die Geschwindigkeit v gilt:

$$\begin{aligned} v^2 &= \dot{x}^2 + \dot{y}^2 \\ &= (\dot{r} \cos \varphi - r \sin \varphi \dot{\varphi})^2 + (\dot{r} \sin \varphi + r \cos \varphi \dot{\varphi})^2 \\ &= \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2. \end{aligned}$$

Wir haben weiter den Energieerhaltungssatz:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}mv^2 - G_N \frac{mM}{r} = \text{konst} \\ &= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - G_N \frac{mM}{r} \\ &= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + \frac{L^2}{m^2r^2}) - G_N \frac{mM}{r}. \end{aligned}$$

Ziel ist es nun, $r(t)$ zu bestimmen. Wir führen dazu folgende Abkürzungen ein:

$$\begin{aligned} a &= -G_N \frac{mM}{2E} \quad (\text{Länge}) \\ \varepsilon^2 &= 1 + \frac{2EL^2}{G_N^2 M^2 m^3} \quad (\text{Dimensionslos}). \end{aligned}$$

Lösen nach \dot{r} liefert:

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{G_N M}{a}} \frac{1}{r} \sqrt{a^2 \varepsilon^2 - (r - a)^2}.$$

Diese Differentialgleichung lösen wir durch Trennung der Variablen:

$$\int \frac{r dr}{\sqrt{a^2 \varepsilon^2 - (r - a)^2}} = \sqrt{\frac{G_N M}{a}} \int dt = \sqrt{\frac{G_N M}{a}} t + C.$$

Wir verwenden die folgenden Substitution:

$$\begin{aligned} r &= a(1 - \varepsilon \cos \alpha) \\ dr &= a\varepsilon \sin \alpha d\alpha. \end{aligned}$$

Das Integral auf der linken Seite wird zu:

$$\int a(1 - \varepsilon \cos \alpha) d\alpha = a(\alpha - \varepsilon \sin \alpha) + C.$$

Folglich gilt:

$$\alpha - \varepsilon \sin \alpha = \sqrt{\frac{G_N M}{a^3}} t + C := \mu.$$

Gehen wir nun zurück zum Drehimpulssatz, $\dot{\varphi} = \frac{L}{mr^2}$. Wir schreiben

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{d\varphi}{d\alpha} \frac{d\alpha}{dt} = \frac{L}{ma^2(1 - \varepsilon \cos \alpha)^2} \\ \Rightarrow \frac{d\varphi}{d\alpha} &= \frac{L}{ma^2(1 - \varepsilon \cos \alpha)^2} \frac{dt}{d\alpha} \\ &= \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}{1 - \varepsilon \cos \alpha}. \end{aligned}$$

Lösen dieser Differentialgleichung liefert:

$$\cos \varphi = \frac{\cos \alpha - \varepsilon}{1 - \varepsilon \cos \alpha}.$$

Kombinieren dieser Gleichung mit derjenigen für $r(\alpha)$ liefert die Bahnkurve:

$$r(\varphi) = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon \cos \varphi} = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}.$$

Wobei $p := a(1 - \varepsilon^2)$

Diese Bahnkurve beschreibt eine Ellipse für $0 \leq \varepsilon < 1$, einen Parabelast für $\varepsilon = 1$ und eine Hyperbel für $\varepsilon > 1$.

Wir folgern:

Theorem 7.2: Erste Keplersche Gesetz

Die Planeten bewegen sich auf Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.

7.3 Das effektive Gravitationspotential

Wir erinnern uns dass für die Energie gilt:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \underbrace{\left(\frac{L^2}{2mr^2} - G_N \frac{mM}{r} \right)}_{V_{\text{eff}}(r)}.$$

Wenn wir am Minimum des effektiven Potentials sind, befindet sich der Körper auf einer Kreisbahn. Ist die Energie größer als das Minimum, aber kleiner als Null, so befindet sich der Körper auf einer elliptischen Bahn. Ansonsten ist die Bahn offen (Parabel oder Hyperbel).

Das Minimum der potentiellen Energie liegt bei r_{\min} . Es gilt:

$$\begin{aligned} E_p^{\text{eff}} &= -\frac{A}{r} + \frac{B}{r^2} \quad \text{mit } A, G_N m M, B = \frac{L^2}{m} \\ \frac{dE_p^{\text{eff}}}{dr} &= 0 \Rightarrow r_{\min} = \frac{2B}{A} = \frac{L^2}{G_N m^2 M}. \end{aligned}$$

Für die totale Energie am Minimum $E(r = r_{\min})$ gilt:

$$\begin{aligned} E_{\min} &= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_p^{\text{eff}}(r_{\min}) \\ &= 0 - \frac{A^2}{4B} = -\frac{G_N^2 m^3 M^2}{2L^2}. \end{aligned}$$

Wir erinnern uns, dass

$$\varepsilon^2 = 1 + \frac{2EL^2}{G_N^2 M^2 m^3}.$$

Setzen wir $E = E_{\min}$, so erhalten wir:

$$\varepsilon^2 = 1 - 1 = 0.$$

Folglich befinden wir uns effektiv auf einer Kreisbahn.

7.4 Gravitationsfeld ausgedehnter Körper

Wir betrachten zunächst eine Kugelschale mit Radius R und breite dR . Wir machen zunächst einige Symmetrieüberlegungen. Die Massendichte der Schale ist gegeben durch

$$\rho = \frac{dM}{dV} = \text{konst.}$$

Aufgrund der Kugelsymmetrie arbeiten wir in Kugelkoordinaten. Es gilt:

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \varphi \\ y &= r \sin \theta \sin \varphi \\ z &= r \cos \theta. \end{aligned}$$

Wir können also schreiben $dV = r^2 dr d\varphi d\theta$. Folglich gilt für das Gravitationsfeld:

$$d^3 \mathbf{g} = G_N d^3 m \frac{\mathbf{r} - \mathbf{a}}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|^3}.$$

Wobei \mathbf{r} gegeben ist als:

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \varphi \\ r \sin \theta \sin \varphi \\ r \cos \theta \end{pmatrix}, \quad |\mathbf{r} - \mathbf{a}| = \sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \cos \theta}.$$

Definieren wir nun, $\xi = \frac{a}{r} < 1$, so gilt:

$$|\mathbf{r} - \mathbf{a}| = r\sqrt{1 - 2\xi \cos \theta + \xi^2}.$$

Das Feld des Massenelements d^3m am Ort \mathbf{a} ist gegeben durch:

$$d^3\mathbf{g} = \frac{G_N}{r^2} \frac{\rho(d \cos \theta dr d\varphi)}{(1 - 2\xi \cos \theta + \xi^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta - \xi \end{pmatrix}.$$

Integrieren wir nun über φ von 0 bis 2π , so verschwinden die x und y Komponenten aufgrund der Symmetrie.

$$d^2\mathbf{g} = G_N \frac{2\pi d \cos \theta dr}{(1 - 2\xi \cos \theta + \xi^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos \theta - \xi \end{pmatrix}.$$

Integration über θ von -1 bis 1 liefert:

$$dg_z = 2\pi\rho G_N dr \int_{-1}^1 \frac{\cos \theta - \xi}{(1 - 2\xi \cos \theta + \xi^2)^{3/2}} d \cos \theta.$$

Wir substituieren $u = \sqrt{1 - 2\xi \cos \theta + \xi^2}$. Folglich gilt

$$du = \frac{\xi d \cos \theta}{u} \Rightarrow d \cos \theta = \frac{u du}{\xi}.$$

Schlussendlich ist $\cos \theta = \frac{1+\xi^2-u^2}{2\xi}$.

Das Integral wird zu:

$$\begin{aligned} dg_z &= -2\pi\rho G_N dr \int_{1+\xi}^{1-\xi} \frac{1 - \xi^2 - u^2}{2\xi^2} du \\ &= \pi\rho G_N \frac{dr}{\xi^2} \int_{1-\xi}^{1+\xi} \frac{1 - \xi^2}{u^2} - 1 du \\ &= -\frac{\pi\rho G_N}{\xi^2} \left[\frac{1 - \xi^2}{u} + u \right]_{1-\xi}^{1+\xi} dr \\ &= 0. \end{aligned}$$

Betrachten wir nun das Feld ausserhalb der homogenen Kugelschale. Also der Fall $\xi > 1$. Ausrechnen liefert

$$dg_z = -\frac{4\pi\rho G_N}{\xi^2} dr = -G_N \frac{dM}{a^2}.$$

Dieser Ausdruck ist *unabhängig* von r , solange $a > r$.

Das Feld einer massiven Kugel mit homogener Massenverteilung ist also

$$\begin{aligned} g(r) &= \frac{G_N}{r^2} \int_0^r dm \\ &= \frac{G_N}{r^2} \int_0^r 4\pi r'^2 \rho dr' \\ &= \frac{4\pi}{3} \rho G_N r. \end{aligned}$$

Dies gilt allerdings nur für $r < R$. Für $r > R$ gilt:

$$g(r) = -G_N \frac{M}{r^2}.$$

Betrachten wir nun einen Galaxiestern. Dazu betrachten wir eine Galaxie welche eine flache Scheibe mit homogener

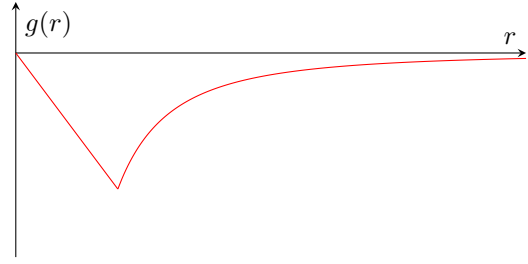


Abbildung 12: Gravitationsfeld einer homogenen Kugel

Flächendichte σ ist. Unsere Annahme ist, dass im Galaxiekern die Kraft $F_G = G_N \frac{mM}{R^3} r$ Weiter ist die Zentripetalkraft $F_Z = m \frac{v^2}{r}$. Für eine Kreisbahn müssen diese Kräfte gleich sein:

$$\begin{aligned} G_N \frac{mM}{R^3} r &= m \frac{v^2}{r} \\ \Rightarrow v(r) &= \sqrt{G_N \frac{M}{R^3} r} \propto r. \end{aligned}$$

Wir würden also erwarten, dass die Geschwindigkeit im Galaxiekern linear mit dem Abstand zum Zentrum ansteigt.

Ausserhalb des Kerns ist die Kraft $F \propto \frac{1}{r^2}$. Folglich gilt:

$$\begin{aligned} G_N \frac{mM}{r^2} &= m \frac{v^2}{r} \\ \Rightarrow v(r) &= \sqrt{G_N \frac{M}{r}} \propto \frac{1}{\sqrt{r}}. \end{aligned}$$

Wir sehen also, dass die Geschwindigkeit im Kern linear

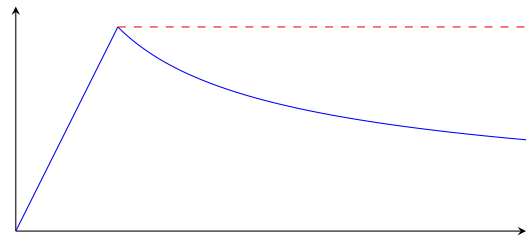


Abbildung 13: Erwartete Rotationskurve einer Galaxie vs. gemessene Rotationskurve

ansteigt und ausserhalb des Kerns wieder abfällt. Messungen zeigen jedoch, dass die Geschwindigkeit ausserhalb des Kerns konstant bleibt (siehe Abbildung 13). Dies deutet darauf hin, dass es ausserhalb des Kerns noch Materie geben muss, welche die Gravitation beeinflusst.

8 Dynamik des starren Körpers

Bisher haben wir uns 1 Massenpunkt betrachtet. Anschliessend haben wir viele Massenpunkte betrachtet. Nun wollen wir eine kontinuierliche Massenverteilung betrachten. Im Allgemeinen ist dies sehr kompliziert. Wir betrachten deshalb den starren Körper.

8.1 Massenschwerpunkt

Wenn wir ein System von N Massenpunkten haben, so ist der Massenschwerpunkt gegeben durch:

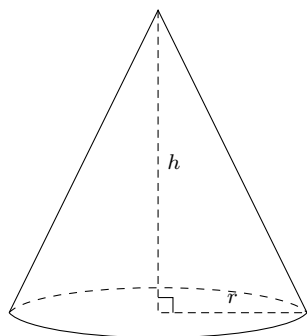
$$\mathbf{r}_s = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \{\rho(\mathbf{r}_i) \Delta V_i\}.$$

Beim Grenzübergang zu einer kontinuierlichen Massenverteilung geht die Summe in ein Integral über das Volumen V des Körpers über:

$$\mathbf{r}_s = \frac{1}{M} \int_M \mathbf{r} dm = \frac{1}{M} \iiint_V \mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) dV.$$

Example 8.1: Kreiskegel

Bestimme den Massenschwerpunkt eines homogenen Kreiskegels.



Solution. Für den Radius auf einer Höhe z gilt:

$$r(z) = \frac{R}{h}(h - z).$$

Das Volumen des Kegels ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} V &= \iiint_V dV = \int \pi r^2 dz \\ &= \int_0^h \pi \left(\frac{R}{h}(h - z) \right)^2 dz = \frac{1}{3} \pi R^2 h. \end{aligned}$$

Für die Massendichte gilt also

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{3M}{\pi R^2 h}.$$

Für den Schwerpunkt gilt also:

$$\begin{aligned} z_s &= \frac{1}{M} \iiint_V z \rho dV = \frac{\rho}{M} \int_0^h z \pi r^2 dz \\ &= \frac{\rho}{M} \int_0^h z \pi \left(\frac{R}{h}(h - z) \right)^2 dz \\ &= \frac{3}{h^3} \int_0^h z(h - z)^2 dz = \frac{3}{h^3} \left[\frac{h^2 z^2}{2} - \frac{2hz^3}{3} + \frac{z^4}{4} \right]_0^h \\ &= \frac{3}{h^3} \cdot \frac{h^4}{12} = \frac{h}{4}. \end{aligned}$$

8.2 Kräfte und Drehmomente

Gegeben sei ein starrer Körper mit einem Drehpunkt O und einer Kraft \mathbf{F} am Punkt P . Für das Drehmoment \mathbf{M}

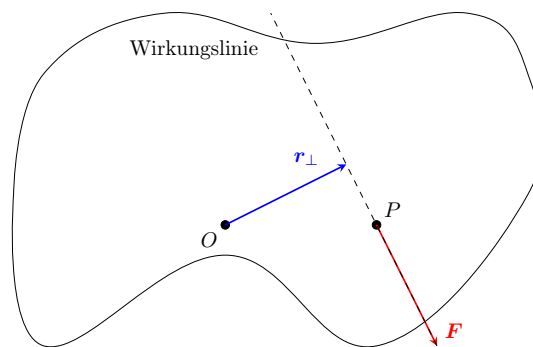


Abbildung 14: Kraft auf starren Körper

um den Punkt O gilt:

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r}_\perp \mathbf{F}.$$

Wir sehen nur der Senkrechte Anteil von \mathbf{r} zur Kraft \mathbf{F} trägt zum Drehmoment bei. Egal auf welchem Punkt dieser **WIRKUNGSLINIE** die Kraft angreift, das Drehmoment bleibt gleich.

Wenn wir Kräfte addieren, so unterscheiden wir 3 Fälle:

1. Die Kräfte greifen am selben Punkt an. Dann addieren wir die Kräfte vektoriell.
2. Die Kräfte greifen an verschiedenen Punkten an. Dann verschieben wir die Kräfte entlang ihrer Wirkungslinie zum selben Punkt und addieren die Kräfte vektoriell. Dieses Verfahren funktioniert nur, wenn die Vektoren nicht parallel sind.
3. Wenn beide Kräfte parallel sind, so führen wir ein verschwindendes Kräftepaar ein. Dann können wir erneut die zweite Variante anwenden.

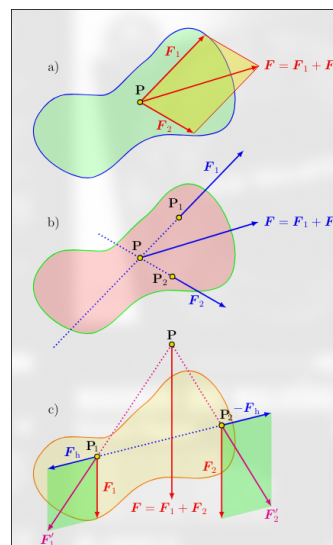


Abbildung 15: Kraftaddition bei starren Körpern

Wenn wir nun das Drehmoment betrachten, so ist der Drehpunkt wichtig. Wir erinnern uns, dass das Drehmoment ein axialer Vektor ist.

Bei einem Kräftepaar mit $\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2$ gilt für das Drehmoment des Gesamtsystemes:

$$\mathbf{M} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 = \underbrace{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}_{\mathbf{r}_{12}} \times \mathbf{F}_1 = \mathbf{r}_{12\perp} \times \mathbf{F}_1.$$

Wenn nun viele Kräfte dann ist $M_{\text{res}} = \sum_i \mathbf{r}_{i\perp} \times \mathbf{F}_i$.

8.3 Statisches Gleichgewicht

Ein statisches Gleichgewicht liegt vor, wenn

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\text{res}} &= 0 \\ \mathbf{M}_{\text{res}} &= 0. \end{aligned}$$

Wichtig ist, dass die zweite Bedingung für alle Drehpunkte gelten muss. Falls die 1. Bedingung erfüllt ist, so reicht es, wenn die 2. Bedingung für einen Punkt erfüllt ist.

Das Drehmoment, welches aufgrund der Schwerkraft auf einen starren Körper wirkt, ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \sum_{i=1}^N (\mathbf{r}_i^* \times \mathbf{F}_i) \\ &= \sum_{i=1}^N (\mathbf{r}_i^* \times m_i \mathbf{g}) \\ &= \left(\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i^* \right) \times \mathbf{g} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Da wir im letzten Schritt den Massenschwerpunkt als Bezugspunkt gewählt haben.

8.4 Lineare und Drehbewegung, Trägheitstensor

Einen Massenpunkt kann nur Translation ausführen. Folglich hat er 3 Freiheitsgrade. Ein starrer Körper kann zusätzlich noch rotieren. Folglich hat er insgesamt 6 Freiheitsgrade.

Betrachten wir zunächst eine Rotation in 2 Dimensionen. Zum einen ist dann

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{x}{r} \\ \sin \theta &= \frac{y}{r}. \end{aligned}$$

Zum anderen ist aber

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= r \cos(\theta - \varphi) \hat{\mathbf{x}} + r \sin(\theta - \varphi) \hat{\mathbf{y}} \\ &= r \cos \theta \cos \varphi + r \sin \theta \sin \varphi \hat{\mathbf{x}} \\ &\quad - r \sin \theta \cos \varphi + r \cos \theta \sin \varphi \hat{\mathbf{y}} e_x = \cos \varphi \hat{\mathbf{x}} + \sin \varphi \hat{\mathbf{y}} \\ e_y &= -\sin \varphi \hat{\mathbf{x}} + \cos \varphi \hat{\mathbf{y}}. \end{aligned}$$

Folglich ist

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

Im Dreidimensionalen würde dies Matrix dann so aussehen:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Unser Ziel ist es nun, die Bewegung des starren Körpers zu beschreiben.

Für den Gesamtimpuls des Systemes wenn es sich nicht dreht gilt:

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^N \Delta m_i \mathbf{v}_i = M \mathbf{v}_s.$$

Gehen wir nun über in den Grenzübergang zu einer kontinuierlichen Massenverteilung, so gilt:

$$\mathbf{p} = \int \mathbf{v} dm = \iiint \mathbf{v}_s \rho(\mathbf{r}) dV = M \mathbf{v}_s.$$

Für die kinetische Energie gilt also

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \Delta m_i v_i^2 = \frac{1}{2} M v_s^2.$$

Das selbe gilt im Grenzübergang.

Betrachten wir nun die Rotation. Für den Gesamtdrehimpuls des starren Körpers gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \mathbf{L}^* + \mathbf{r}_s \times \mathbf{p}_s \\ \frac{d\mathbf{L}}{dt} &= \mathbf{M}_{\text{ext}}. \end{aligned}$$

Die Geschwindigkeit des i -ten Massenpunktes ist gegeben durch:

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_s + \mathbf{v}_i^* = \mathbf{v}_s + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i^*.$$

Für die kinetische Energie gilt also

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \{ \mathbf{v}_s + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i^* \}^2 \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{v}_s^2 M + \mathbf{v}_s \cdot \underbrace{\left\{ \boldsymbol{\omega} \times \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i^* \right\}}_{=0} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \{ \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i^* \}^2 \\ &= \frac{1}{2} M v_s^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \{ \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i^* \}^2 \\ &= T_s + T^*. \end{aligned}$$

Betrachten wir nun eine Rotation um eine starre Achse. Um dies zu beschreiben, führen wir das Trägheitsmoment ein

Definition 8.2: Trägheitsmoment

Das **TRÄGHEITSMOMENT** J_A eines starren Körpers bezüglich einer Achse A ist definiert als:

$$J_A = \sum_{i=1}^N m_i r_{i\perp}^2.$$

Im Grenzübergang zu einer kontinuierlichen Massenverteilung gilt:

$$J_A = \int_M r_{\perp}^2 dm = \iiint_V r_{\perp}^2 \rho(\mathbf{r}) dV.$$

Es gilt:

$$\mathbf{L}_{\parallel,i} = \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i = m_i(\mathbf{r}_{i\perp} \times \mathbf{v}_i) = m_i r_{i\perp}^2 \omega \hat{\mathbf{e}}_\omega.$$

Folglich ist der Gesamtdrehimpuls:

$$\mathbf{L}_{\parallel} = \sum_{i=1}^N \mathbf{L}_{\parallel,i} = \left(\sum_{i=1}^N m_i r_{i\perp}^2 \right) \omega \hat{\mathbf{e}}_\omega = J_A \omega.$$

Die Rotationsenergie lässt sich nun auch schreiben als:

$$T^* = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \{\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i^*\}^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_{i=1}^N m_i r_{i\perp}^2 = \frac{1}{2} J_A \omega^2.$$

Letzteres gilt für das Drehmoment:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_i &= \frac{d\mathbf{L}_i}{dt} = \Delta m_i (\mathbf{r}_{i\perp} \times \mathbf{a}_i + \frac{d\mathbf{r}_{i\perp}}{dt} \times \mathbf{v}_i) \\ &= \mathbf{r}_{i\perp} \times \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} \\ &= \mathbf{r}_{i\perp} \times \mathbf{F}_t. \end{aligned}$$

Weiter wissen wir, dass

$$\frac{d\mathbf{L}_{\parallel,i}}{dt} = J_A \frac{d\omega}{dt} = \mathbf{M}_{\parallel,i}.$$

Das Gesamtdrehmoment ist also:

$$\mathbf{M}_{\parallel} = J_A \frac{d\omega}{dt} = J_A \frac{d^2\varphi}{dt^2} \hat{\mathbf{e}}_\omega.$$

Berechnen wir nun ein paar Trägheitsmomente. Im folgenden gehe die Drehachse durch den Massenschwerpunkt.

Example 8.3: Dünnwandiger Zylinder

Für einen dünnwandigen Zylinder der Masse M und des Radius R gilt für die Drehachse entlang der Symmetrieachse:

$$J_z = \int r_{\perp}^2 dm = \int R^2 dm = R^2 M.$$

Example 8.4: Massiver Zylinder

Für den gleichen Zylinder, aber massiv gilt:

$$J_z = \int r_{\perp}^2 dm = \int_0^R r^2 (\rho 2\pi r L dr) = \frac{1}{2} M R^2.$$

Example 8.5: Hohlzylinder

Für einen Hohlzylinder mit innerem Radius R_1 und äusserem Radius R_2 gilt:

$$\begin{aligned} J_z &= \int r_{\perp}^2 dm = \int_{R_1}^{R_2} r^2 (\rho 2\pi r L dr) \\ &= \rho 2\pi L \frac{R_2^4 - R_1^4}{4} = \frac{1}{2} M \frac{R_2^4 - R_1^4}{R_2^2 - R_1^2} \\ &= \frac{1}{2} M (R_1^2 + R_2^2). \end{aligned}$$

Example 8.6: Massive Kugel

Für eine massive Kugel der Masse M und des Radius R gilt:

$$\begin{aligned} J_z &= \iiint r_{\perp}^2 \rho dV \\ &= \rho \int_{-R}^R dz \int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} r_{\perp}^2 (r_{\perp} dr_{\perp}) \int_0^{2\pi} d\varphi \\ &= 2\pi \rho \int_{-R}^R dz \int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} r_{\perp}^3 dr_{\perp} \\ &= 2\pi \rho \int_{-R}^R \frac{(R^2 - z^2)^2}{4} dz \\ &= \frac{\pi \rho}{2} \left[R^4 z - \frac{2R^2 z^3}{3} + \frac{z^5}{5} \right]_{-R}^R \\ &= \frac{8\pi \rho R^5}{15} = \frac{2}{5} M R^2. \end{aligned}$$

Example 8.7: Quader

Für einen Quader mit den Kantenlängen a, b, c gilt:

$$\begin{aligned} J_z &= \int r_{\perp}^2 dm = \iiint_V (x^2 + y^2) \rho dV \\ &= \rho \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} dz \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} (x^2 + y^2) dx \\ &= \rho \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} dz \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left[\frac{a^3}{12} + ay^2 \right] dy \\ &= \rho \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \left[\frac{a^3 b}{12} + \frac{ab^3}{12} \right] dz \\ &= \rho c \left[\frac{a^3 b}{12} + \frac{ab^3}{12} \right] \\ &= \underbrace{\rho abc}_M \frac{a^2 + b^2}{12} = M \frac{a^2 + b^2}{12}. \end{aligned}$$

Example 8.8: Dünner Stab

Für einen dünnen Stab der Länge l gilt:

$$J_z = \int r_{\perp}^2 dm = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} x^2 \rho dx = \rho \frac{l^3}{12} = \frac{M l^2}{12}.$$

Wenn wir nun Trägheitsmomente bezüglich verschiedener Achsen betrachten, so können wir diese mit dem **STEINER'SCHEN SATZ** berechnen.

Theorem 8.9: Steinerscher Satz

Sei $J_{A'}$ das Trägheitsmoment eines starren Körpers bezüglich einer Achse A' , die parallel zu einer Achse A durch den Massenschwerpunkt verläuft. Dann gilt:

$$J_{A'} = J_A + M a^2.$$

Dabei ist d der Abstand zwischen den beiden Achsen.

Proof. Es gilt:

$$\begin{aligned} J_{A'} &= \int_M \mathbf{r}'^2 dm = \int_M (\mathbf{a} + \mathbf{r})^2 dm \\ &= \int_M (r^2 + a^2 + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}) dm \\ &= \int_M r^2 dm + a^2 \int_M dm + 2\mathbf{a} \cdot \underbrace{\int_M \mathbf{r} dm}_{=0} \\ &= J_A + Ma^2. \end{aligned}$$

Um Trägheitsmomente experimentell zu messen kann eine Torsionsfeder verwendet werden. In diesem Fall gilt für das Drehmoment:

$$M = -D\varphi.$$

Dabei ist D die **RICHTGRÖSSE** der Torsionsfeder. Lösen der DGL liefert

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{J}}.$$

Experimentell kann man erkennen, dass das Trägheitsmoment in der Regel für jede Orientation verschieden ist. Um dies zu beschreiben, führen wir den **TRÄGHEITSTENSOR** ein, welcher eine 3×3 Matrix ist.

8.5 Rollende Körper

Damit ein Körper rollen kann, müssen die Rollbedingungen erfüllt sein:

$$\begin{aligned} v_s &= R\omega \\ a_s &= R\alpha. \end{aligned}$$

Es gibt also 3 Situationen:

- 1) Reine Translation: Alle Punkte haben die selbe Geschwindigkeit, folglich rutscht der Körper mit allfälliger Reibung.
- 2) Keine Translation: Der Körper rotiert um einen fixen Punkt. In diesem Fall haben gegenüberliegende Punkte die umgekehrte Geschwindigkeit.
- 3) Rollen ohne Gleiten: Der Berührungspunkt hat immer die Geschwindigkeit Null. Dies ist eine Zwangsbedingung.

Im Zusammenhang mit rollenden Körpern ist die Reibung wichtig.

Im statischen Fall existiert genau ein Punkt welcher den Boden berührt. Jedoch sind Körper in der Realität deformierbar. Folglich existiert eine Kontaktfläche. In diesem Fall wirkt die Normalkraft nicht direkt unterhalb des Schwerpunkts, sondern m_r davor.

Im Gleichgewicht gilt

$$\begin{aligned} F &= F_R \leq \mu_0 F_N \\ F_N &= F_G. \end{aligned}$$

Geht das Rad nun Vorwärts, so wird ein Drehmoment erzeugt mit

$$M = F_N m_r - F_R r.$$

Also

$$\begin{aligned} F &= F_R = F_N \frac{m_r}{R} = \mu_r F_N. \\ \mu_R &= \frac{m_r}{r}. \end{aligned}$$

9 Schwingungen

Ein schwingungsfähiges System ist ein System, welches eine stabile Gleichgewichtslage besitzt. Ein Beispiel ist ein 2-Atomiges Molekül, welches um die Gleichgewichtslage schwingt. In diesem Falle können wir das Potential quadratisch nähern. Folglich ist die rücktreibende Kraft

$$F = -kx.$$

□ Die Bewegungsgleichung lautet also

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0.$$

Allgemein ist die Lösung für diese Schwingung

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0) + B \sin(\omega t + \varphi_0).$$

Dabei ist $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ die Kreisfrequenz.

Ein weiteres Beispiel ist das Fadenpendel. In diesem Fall ist die rücktreibende Kraft

$$F = -mg \sin \varphi.$$

Für $x \ll l$ gilt $\sin \varphi \approx \varphi \approx \frac{x}{l}$. Folglich ist

$$\phi(t) = \phi_0 \cos(\omega t + \varphi_0) + B \sin(\omega t + \varphi_0).$$

Wobei $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$.

Definition 9.1: Harmonischer Oszillator

Ein System, welches durch die DGL

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0.$$

beschrieben wird, heißt **HARMONISCHER OSZILLATOR**.

Mögliche Beispiele sind ein Pendel, eine Feder oder ein Molekül.

Die Periode einer Schwingung ist die Zeit, welche für eine vollständige Schwingung benötigt wird. Sie ist gegeben durch

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Eine weitere wichtige Grösse ist die Frequenz ν , welche die Anzahl der Schwingungen pro Sekunde angibt:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}.$$

Betrachten wir erneut eine Schwingung

$$x(t) = A \sin(\omega t + \delta).$$

Die Periode schwingt von $-A$ bis A . Die Geschwindigkeit ist

$$v(t) = \dot{x}(t) = A\omega \cos(\omega t + \delta).$$

Für die Beschleunigung folgt

$$a(t) = \ddot{x}(t) = -A\omega^2 \sin(\omega t + \delta) = -\omega^2 x(t).$$

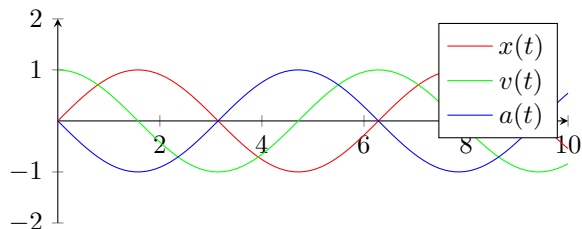


Abbildung 16: Schwingung von $x(t)$, $v(t)$ und $a(t)$

Zum rechnen kann man Schwingungen auch mit komplexen Zahlen darstellen. Wir definieren die komplexe Schwingung als

$$z(t) = \tilde{A}e^{i(\omega t)} \quad \tilde{A} \in \mathbb{C}.$$

Die reale Schwingung ist dann der Realteil von $z(t)$:

$$x(t) = \Re(z(t)) = \Re(\tilde{A}e^{i\omega t}) = A \sin(\omega t + \delta).$$

Bei einem Experiment ist in der Regel ω bekannt. Man kann jeweils x_0, v_0 verändern. Gesucht sind nun A, δ . Setzen wir $t = 0$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} x_0 &= x(0) = A \sin(\delta) \\ v_0 &= v(0) = A\omega \cos(\delta). \end{aligned}$$

Löst man das Gleichungssystem so findet man

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2} \quad \delta = \arctan\left(\frac{x_0\omega}{v_0}\right).$$

Betrachten wir nun die Energie eines harmonischen Oszillators. Wir haben die Schwingungsgleichung $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$. Multiplizieren wir diese mit $m\dot{x}$, so erhalten wir

$$m\dot{x} \frac{d\dot{x}}{dt} + m\omega^2 x \frac{dx}{dt} = 0.$$

Dies können wir umschreiben zu

$$m \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{x}^2}{2} \right) + m\omega^2 \frac{d}{dt} \left(\frac{x^2}{2} \right) = 0.$$

Um die differentiale Schreibweise zu vermeiden, integrieren wir beide Seiten über die Zeit:

$$\underbrace{\frac{1}{2}m\dot{x}^2}_{E_{\text{kin}}} + \underbrace{\frac{1}{2}m\omega^2 x^2}_{E_{\text{pot}}} = \text{const.}$$

Setzen wir nun den Schwingungsansatz ein, finden wir

$$E_{\text{tot}} = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2.$$

Skizzieren wir die Energieverteilung in Abhängigkeit der Zeit sieht dies wie folgt aus:

Um die durchschnittliche kinetische Energie zu berechnen, integrieren wir

$$\begin{aligned} \langle E_{\text{kin}} \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} m \dot{x}^2 dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 \cos^2(\omega t + \delta) dt \\ &= \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\omega t + \delta) dt \\ &= \frac{1}{2} E_{\text{tot}}. \end{aligned}$$

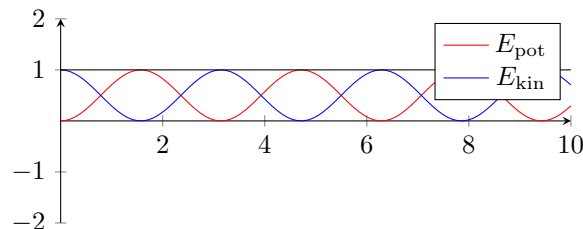


Abbildung 17: Energieverteilung eines harmonischen Oszillators

9.1 Gedämpfte Schwingungen

In der Realität sind Schwingungen immer gedämpft. Dies bedeutet, dass Energie aus dem System verloren geht. Dies kann durch Reibung oder Luftwiderstand verursacht werden. Wir modellieren den **GEDÄMPFTEN HARMONISCHEN OSZILLATOR** durch

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x}.$$

Wir führen die folgenden Größen ein:

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad \text{und} \quad \rho = \frac{b}{2m}.$$

Die Gleichung wird somit zu

$$\ddot{x} + 2\rho\dot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

Für die Lösung gibt es drei Fälle abhängig von $\lambda = -\rho \pm \sqrt{\rho^2 - \omega_0^2}$:

- *Schwache Dämpfung* ($\rho < \omega_0$):

$$x(t) = Ae^{-\rho t} \sin(\omega_d t + \delta) \quad \text{mit} \quad \omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \rho^2}.$$

Man Bemerke, dass $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \rho^2} < \omega_0$.

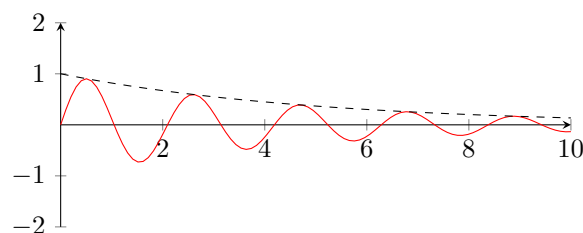


Abbildung 18: Schwach gedämpfte Schwingung

- *Kritische Dämpfung* ($\rho = \omega_0$):

$$x(t) = (A + Bt)e^{-\rho t}.$$

Dieser Fall wird auch asymptotischer Grenzfall genannt.

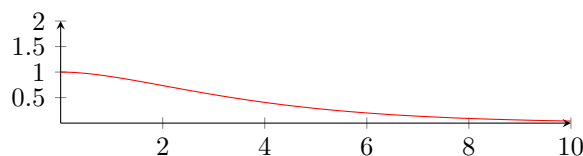


Abbildung 19: Kritisch gedämpfte Schwingung

- **Überkritische Dämpfung** ($\rho > \omega_0$):

$$x(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t} \quad \text{mit} \quad \lambda_{1,2} = -\rho \pm \sqrt{\rho^2 - \omega_0^2}.$$

In diesem Fall gibt es keine Schwingung mehr, das System kehrt exponentiell zum Gleichgewicht zurück.

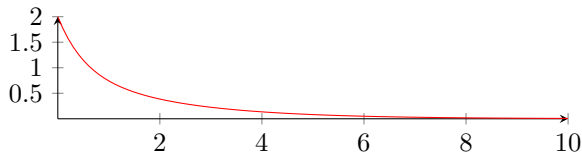


Abbildung 20: Überkritisch gedämpfte Schwingung

Betrachten wir nun die Energiebilanz eines gedämpften Oszillators. Wir beginnen erneut mit der Bewegungsgleichung

$$\ddot{x} + 2\rho\dot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

Wir multiplizieren diese mit $m\dot{x}$ und erhalten

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2 \right) = -b \dot{x}^2.$$

Hierbei definieren wir die Rechte Seite als die **REIBUNGSLEISTUNG**

$$P_R = -b \dot{x}^2 < 0.$$

Die linke Seite ist die Zeitliche Änderung der Gesamtenergie:

$$\frac{d}{dt} E_{\text{tot}} = P_R.$$

Als Beispiel betrachten wir die schwach gedämpfte Schwingung. Hierbei ist $\rho \ll \frac{1}{T}$. Die Mittlere Energie ist

$$\langle E_{\text{kin}} \rangle = \frac{1}{2} E_{\text{tot}} = \frac{1}{2} m \langle \dot{x}^2 \rangle_T.$$

Weiter ist auch

$$P_R = -2\rho m \langle \dot{x}^2 \rangle_T = -2\rho E_{\text{tot}}.$$

Folglich ist

$$E_{\text{tot}}(t) = E_{\text{tot}}(0) e^{-2\rho t}.$$

Eine weitere wichtige Grösse ist der **GÜTEFAKTOR** Q . Dieser ist die relative Abnahme der Energie während einer Periode.

$$\begin{aligned} Q &= 2\pi \frac{E_{\text{tot}}(t)}{E_{\text{tot}}(t) - E_{\text{tot}}(t+T)} \\ &= 2\pi \frac{E_0 e^{-2\rho t}}{E_0 e^{-2\rho t} - E_0 e^{-2\rho(t+T)}} \\ &= 2\pi \cdot \frac{\tau}{T} \quad \text{mit} \quad \tau = \frac{1}{2\rho}. \end{aligned}$$

9.2 Die erzwungene Schwingung

Stellen wir uns erneut einen gedämpften Oszillator vor, welcher durch eine externe harmonische Kraft beschleunigt wird. Die Bewegungsgleichung lautet nun

$$\ddot{x} + 2\rho\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\Omega t).$$

Hierbei ist Ω die Kreisfrequenz der Anregung und ω_0 die Eigenfrequenz des Systems.

Dieser Prozess hat einen Einschwingvorgang, bei welchem wir eine Überlagerung von Eigenschwingungen und Anregung haben. Nach dem Einschwingen dominiert die erzwungene Schwingung. Wir suchen daher eine Lösung der Form

$$x(t) = x_0 e^{i(\Omega t)}.$$

Setzen wir dieses $x(t)$ in die Bewegungsgleichung ein, so erhalten wir

$$x_0 (-\Omega^2 + 2\rho i \Omega + \omega_0^2) e^{i(\Omega t)} = \frac{F_0}{m} e^{i(\Omega t)}.$$

Der experimentell messbare Teil ist der Realteil von $x(t)$:

$$x_0 = \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \Omega^2 + 2\rho i \Omega}.$$

Hierbei ist x_0 eine komplexe Zahl. Wir können sie in Polardarstellung schreiben:

$$x_0 = |x_0| e^{i\delta}.$$

Weiter sei $a_0 = \frac{F_0}{m}$. Für den Betrag von x_0 folgt

$$|x_0| = \frac{a_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\rho\Omega)^2}}.$$

Für den Phasenwinkel δ folgt

$$\delta = \arctan \left(\frac{-2\rho\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} \right).$$

Wir definieren nun die folgenden Grössen:

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{\Omega}{\omega_0} \quad (\text{Normierte Frequenz}) \\ \xi &= \frac{\rho}{\omega_0} \quad (\text{Dämpfungsfaktor}) \end{aligned}$$

Betrachten wir nun den Fall $\xi \ll 1$. In diesem Fall haben wir

$$V(\eta, \xi) = \frac{1}{\omega_0^2} \frac{1}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + (2\xi\eta)^2}}.$$

Wir möchten nun das Maximum von $V(\eta, \xi)$ bestimmen. Dazu brauchen wir $\frac{\partial V}{\partial \eta} = 0$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{\omega_0^2} \left(-\frac{1}{2}\right) (\dots) \cdot [2(1 - \eta^2)(-2\eta) + 8\xi^2\eta] \\ &= 2\eta(1 - \eta^2) - 4\xi^2\eta. \end{aligned}$$

Folglich ist $\eta_{\text{res}} = \sqrt{1 - 2\xi^2}$. Für kleine Dämpfung ist dies näherungsweise $\eta_{\text{res}} \approx 1$. In jedem Fall ist die Resonanzfrequenz kleiner als die Eigenfrequenz.

In jedem Falle gilt für die Phasenverschiebung für $\eta \ll 1$, $\delta \approx 0$. Ist $\eta = 1$, so ist $\delta = -\frac{\pi}{2}$ und für $\eta \gg 1$ ist $\delta \approx -\pi$.

Wir möchten nun die Energiebetrachtung der erzwungenen Schwingung durchführen. Wir haben die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{x} + 2\rho m\dot{x} + m\omega_0^2 x = F_{\text{ext}}.$$

Multiplizieren wir diese Gleichung mit \dot{x} , so erhalten wir

$$\frac{d}{dt} \underbrace{\left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2 \right)}_{E_{\text{osz}}} = -2\rho m \dot{x}^2 + F_{\text{ext}} \dot{x}.$$

Im stationären Fall muss $\frac{d}{dt} E_{\text{osz}} = 0$ gelten. Folglich also

$$F_{\text{ext}} \dot{x} = 2\rho m \dot{x}^2.$$

Die Leistung, welche im Oszillator durch Dämpfung verloren geht, ist

$$\langle P \rangle_{T_\Omega} = \frac{1}{T_\Omega} \int_0^{T_\Omega} F_{\text{ext}} \dot{x} dt = \frac{m a_0^2}{4\rho} \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega_0^2 \Omega^2}{2\rho\Omega} \right)^2}.$$

Sowohl für $\omega_0 \ll \Omega$ als auch für $\omega_0 \gg \Omega$ geht die Leistung gegen null. Das Maximum der Leistung ist bei $\Omega = \omega_0$.

Wichtig ist hierbei, dass die maximale Leistung immer bei $\eta = 1$ ist. Also maximale Amplitude bedeutet nicht maximale Leistung.

9.3 Überlagerung von Schwingungen

Betrachten wir zunächst 2 Schwingungen mit der selben Frequenz. Also ist

$$\begin{aligned} x_1 &= A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \\ x_2 &= A_2 \cos(\omega t + \varphi_2). \end{aligned}$$

Also ist $x(t) = x_1 + x_2$. Wir können dies auch schreiben als

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi).$$

Wobei $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$. Sollten $\varphi_1 = \varphi_2$, so gilt $A = A_1 + A_2$ (konstruktive Interferenz). Für die Phase gilt

$$\varphi = \arctan \left(\frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2} \right).$$

Wenn wir nun 2 Schwingungen mit verschiedenen Frequenzen betrachten, aber die selbe Amplitude, so gilt

$$\begin{aligned} x_1 &= \Re(Ae^{i\omega_1 t}) \\ x_2 &= \Re(Ae^{i\omega_2 t}). \end{aligned}$$

Für die Summe gilt dann

$$x(t) = \underbrace{2A \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)}_{\tilde{A}} \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right).$$

Wir bezeichnen \tilde{A} als Zeitabhängige Amplitude. Folglich ist

$$x(t) = \tilde{A} \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right).$$

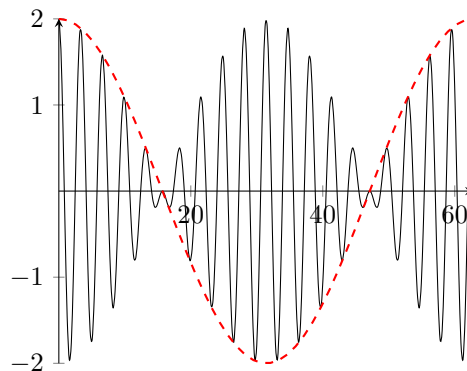


Abbildung 21: Überlagerung von 2 Schwingungen mit leicht unterschiedlichen Frequenzen

9.4 Gekoppelte Schwingungen

Betrachten wir zwei identische Pendel, welche durch eine Feder verbunden sind. Die Bewegungsgleichungen lauten:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 + k(x_1 - x_2) &= 0 \\ \ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 + k(x_2 - x_1) &= 0. \end{aligned}$$

Wir vereinfachen unser Problem durch die Einführung der **NORMALKOORDINATEN**:

$$z_1 = x_1 - x_2, \quad z_2 = x_1 + x_2.$$

Bilden wir nun die Summe und Differenz der Bewegungsgleichungen, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \ddot{z}_2 + \omega_0^2 z_2 &= 0 \\ \ddot{z}_1 + (\omega_0^2 + 2k)z_1 + 2\frac{k}{m}z_1 &= 0. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen sind nun entkoppelt und können einzeln gelöst werden.

$$\begin{aligned} \omega_2 &= \omega_0 \\ \omega_1 &= \sqrt{\omega_0^2 + 2\frac{k}{m}}. \end{aligned}$$

Rücksubstitution liefert dann die Lösungen für x_1 und x_2 .

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2}(z_1 + z_2) = A \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right) \\ x_2 &= \frac{1}{2}(z_2 - z_1) = A \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right) \sin\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right). \end{aligned}$$

Im Fall, dass beide Pendel gleich oder gegenphasig schwingen, so spricht man von den **EIGENMODEN** des Systems. Sie stellen stabile Schwingungsmodi dar.

Betrachten wir nun eine unendliche Federkette, wobei jede Masse m ist und jede Federkonstante k . Der Abstand zwischen zwei Massen sei a . Die Bewegungsgleichung für die Masse an der Stelle n lautet:

$$\begin{aligned} m\ddot{u}_n &= k(u_{n-1} - u_n) + k(u_{n+1} - u_n) \\ &= -k(2u_n - u_{n-1} - u_{n+1}). \end{aligned}$$

Hierbei ist u_n die Auslenkung der n -ten Masse. Wir wählen den Ansatz

$$u_n = u e^{i(qan - \omega t)}.$$

Folglich gilt

$$\begin{aligned} -m\omega^2 e^{i(qan-\omega t)} &= -k(2 - e^{-iqa} - e^{iqa}) e^{i(qan-\omega t)} \\ -m\omega^2 &= -k(2 - 2\cos(qa)) \\ \omega^2 &= 2\sqrt{\frac{k}{m}} \left| \sin\left(\frac{qa}{2}\right) \right|. \end{aligned}$$

10 Wärmelehre & Thermodynamik

Bisher sind wir von Massenpunkten zu starren Körpern übergegangen. Weiter haben wir Kräfte benutzt um Bewegungsgleichungen aufzustellen. Nun wollen wir Kontinua und Gase betrachten unter makroskopischen Zuständen, im wesentlichen Druck, Volumen und Temperatur.

10.1 Die Temperatur

Wärme beschreibt den Energieaustausch zwischen Systemen unterschiedlicher Temperatur. Umgekehrt, wenn kein Energieaustausch stattfindet, so sind die Systeme bei gleicher Temperatur.

Wir definieren den **DRUCK** als

$$p = \frac{F}{A}.$$

In einem Gasthermometer, haben wir eine Flüssigkeit in einer Säule. Die Gewichtskraft der Flüssigkeitssäule erzeugt einen Druck

$$F = mg = \rho A l g.$$

10.2 Die absolute Temperatur

Es gibt eine tiefste Temperatur, $T \approx -273^\circ\text{C}$. Wir können nun die Kelvin-Skala einführen:

$$T(K) = T(^{\circ}\text{C}) + 273.15.$$

10.3 Wärmeenergie und Wärmekapazität

Wärmekapazität beschreibt die Fähigkeit eines Körpers Wärme aufzunehmen und abzugeben. Wir definieren

Definition 10.1: Wärmekapazität

Wird einem Körper die Wärmemenge ΔQ zugeführt, so erhöht sich seine Temperatur um ΔT . Die **WÄRMEKAPAZITÄT** C ist definiert als:

$$C = \frac{\Delta Q}{\Delta T}.$$

Die **SPEZIFISCHE WÄRMEKAPAZITÄT** c ist definiert als

$$c = \frac{C}{m} = \frac{1}{m} \frac{\Delta Q}{\Delta T}.$$

Diese ist eine Stoffeigenschaft.

Weiter ist die **MOLARE WÄRMEKAPAZITÄT** c_M definiert als

$$c_M = \frac{1}{\nu} \frac{\Delta Q}{\Delta T}.$$

Wird dem Körper eine Wärmemenge Q zugeführt, so schreiben wir dies als $Q^\sphericalangle = \int \delta Q^\sphericalangle = \int_{T_a}^{T_b} C(T) dT$. Für geringe Temperaturänderungen gilt näherungsweise

$$Q^\sphericalangle = C \Delta T.$$

Beim Erhitzen von 1 L Wasser mit 650 W um 10°C benötigen wir etwa 68 s. Folglich ist die spezifische Wärmekapazität von Wasser etwa

$$c_{\text{Wasser}} \approx 4.2 \text{ W s}/(\text{kg K}).$$

Für die Molare Wärmekapazität von Festkörpern gilt das sie nahezu konstant ist für alle Stoffe und etwa $25 \text{ J}/(\text{mol K})$ beträgt. Dies wird als **DULONG-PETIT GESETZ** bezeichnet.

10.4 Der Nullte Hauptsatz der Thermodynamik

Zwei Körper im thermischen Kontakt, haben nach einer langen Zeit dieselbe Temperatur.

Mikroskopisch ist Temperatur ein Mass für die thermische Bewegung der Moleküle.

10.5 Der erste Hauptsatz der Thermodynamik

Grundsätzlich beschreibt der erste Hauptsatz die Energieerhaltung in thermodynamischen Systemen. Hierzu führen wir den Begriff der **INNEREN ENERGIE** ein. Für ein Gas ist dies zum Beispiel $U = U(p, T, V, \dots)$. Die Änderung der inneren Energie hängt jedoch nur von Anfangs und Endzustand ab.

$$\Delta U = U_E - U_A.$$

Wärme ist eine Form der Energie, welche allein aufgrund eines Temperaturunterschiedes ΔT übertragen wird.

Theorem 10.2: Der Erste Hauptsatz der Thermodynamik

Die Änderung der inneren Energie eines thermodynamischen Systems ist gleich der zu- oder abgeführten Wärme plus der am System verrichteten Arbeit.

$$dU = \delta Q^\sphericalangle + \delta W^\sphericalangle.$$

Hierbei ist Q^\sphericalangle die zugeführte Wärme und W^\sphericalangle die am System verrichtete Arbeit.

10.6 Ideale Gase

Ein ideales Gas, ist ein idealisiertes Vielteilchensystem, bei dem wir harte Kugeln haben, welche keine Wechselwirkungen ausser Stöße haben. Weiter nehmen wir an, dass das Volumen der Gasteilchen vernachlässigbar klein ist gegenüber dem Volumen des Behälters.

Für einen konstanten Druck gilt $V = C_1 T$. Für ein konstantes Volumen gilt $p = C_2 T$.

Damit können wir die Zustandsgleichung für ideale Gase wie folgt schreiben:

Theorem 10.3: Zustandsgleichung für ideale Gase

Für ein ideales Gas gilt:

$$pV = NkT.$$

Hierbei ist k die Boltzmann-Konstante und N die Anzahl der Teilchen.

Wird einem idealen Gas die Wärmemenge ΔQ zugeführt, so gilt $\Delta Q = \nu C_V \Delta T$ bei konstantem Volumen und $\Delta Q = \nu C_p \Delta T$ bei konstantem Druck. Hierbei gilt $C_p = C_V + R$.

Um dies zu zeigen, betrachten wir die vom Gas verrichtete Arbeit bei der Expansion um ΔV :

Es gilt, nach der Definition der spezifischen Arbeit

$$C_V = \frac{1}{\nu} \left(\frac{\delta Q^\sphericalangle}{\delta T} \right)_V.$$

Da das Volumen konstant ist, verrichtet das Gas keine Arbeit. Folglich ist nach dem ersten Hauptsatz

$$dU = \delta Q^\sphericalangle + \delta W^\sphericalangle = \delta Q^\sphericalangle = \nu C_V dT.$$

Also ist $C_v = \frac{1}{\nu} \left(\frac{dU}{dT} \right)$.

Betrachten wir nun den Fall bei konstantem Druck. Hierbei ist

$$\delta W^\sphericalangle = -F dx = -p A dx = -p dV.$$

Für die Gasgleichung gilt also

$$dV = \frac{\nu R}{p} dT.$$

Folglich ist die Arbeit

$$\delta W^\sphericalangle = -\nu R dT.$$

Nach dem ersten Hauptsatz gilt somit

$$C_p = \frac{1}{\nu} \left(\frac{\delta Q^\sphericalangle}{\delta T} \right)_p = \frac{1}{\nu} \left(\frac{dU}{dT} + \frac{\delta W^\sphericalangle}{dT} \right) = C_V + R.$$

Visuell entspricht die am Gas verrichtete Arbeit dem Flächeninhalt unter der Kurve im p - V Diagramm.

Für die Energie eines idealen Gases gilt

Theorem 10.4: Äquipartitionsgesetz

Die innere Energie eines idealen Gases ist

$$U = \frac{f}{2} \nu R T.$$

Hierbei ist f die Zahl der Freiheitsgrade der Gasteilchen.

Daher ist also die innere Energie auch eine Zustandsgrösse eines idealen Gases.

Im allgemeinen hat ein Einatomiges Gas 3 Freiheitsgrade, ein zweiatomiges Gas 5 Freiheitsgrade und ein 3-atomiges Molekül 6 Freiheitsgrade. Feste Körper haben stets 6 Freiheitsgrade.

Bei idealen Gasen betrachten wir in der Regel vier verschiedenen Zustandsänderungen:

- Isotherme Zustandsänderung: $T = \text{const}$
- Isochore Zustandsänderung: $V = \text{const}$
- Isobare Zustandsänderung: $p = \text{const}$
- Adiabatische Zustandsänderung: $\delta Q^\sphericalangle = 0$

Für Isobare Prozesse ist

$$W^{\sphericalangle} = - \int_{V_a}^{V_e} p dV = -p(V_e - V_a).$$

Bei der isothermen Änderung gilt für eine kleine Volumenänderung dV :

$$\delta W^{\sphericalangle} = -pdV = -\frac{NkT}{V}dV.$$

Für die innere Energie muss T konstant bleiben, aufgrund des Äquipartitionsgesetzes. Folglich ist $\Delta U = 0$. Nach dem ersten Hauptsatz ist somit $\delta Q^{\sphericalangle} = -\delta W^{\sphericalangle}$.

Für die ganze Wärme ist somit

$$Q^{\sphericalangle} = \int \delta Q^{\sphericalangle} = - \int \delta W^{\sphericalangle} = NkT \int_{V_a}^{V_e} \frac{1}{V} dV.$$

Lösen des Integrals liefert

$$Q^{\sphericalangle} = NkT \ln \left(\frac{V_e}{V_a} \right).$$

Im Falle der Isochoren Änderung gilt $\delta W^{\sphericalangle} = 0$. Folglich ist nach dem ersten Hauptsatz $dU = \delta Q^{\sphericalangle}$. Somit ist

$$Q^{\sphericalangle} = \Delta U = \int \nu R \Delta T.$$

Letzlich bleibt die adiabatische Zustandsänderung. Hierbei gilt dass der Prozess so schnell abläuft, dass kein Wärmeaustausch stattfinden kann. Folglich ist $\delta Q^{\sphericalangle} = 0$.

Für die Energie gilt immer

$$dU = \delta Q^{\sphericalangle} + \delta W^{\sphericalangle} = \nu C_V dT.$$

Für die adiabatische Zustandsänderung gilt zusätzlich

$$dU = \delta W^{\sphericalangle} = -pdV = -\nu \frac{RT}{V} dV.$$

Gleichsetzen liefert

$$\begin{aligned} C_V dT &= -\frac{RT}{V} dV \\ C_V \frac{dT}{T} &= -R \frac{dV}{V}. \end{aligned}$$

Wenn wir nun $\kappa = \frac{C_p}{C_V}$ definieren, so gilt

$$\frac{R}{C_V} = \kappa - 1.$$

Da κ konstant ist, können wir integrieren:

$$\ln(T) = -(\kappa - 1) \ln(V) + \text{const.}$$

Somit gilt für die adiabatische Zustandsänderung:

$$TV^{\kappa-1} = \text{const.}$$

Mit der idealen Gasgleichung folgt daraus auch

$$pV^{\kappa} = \text{const} \quad T^{\kappa} p^{1-\kappa} = \text{const.}$$

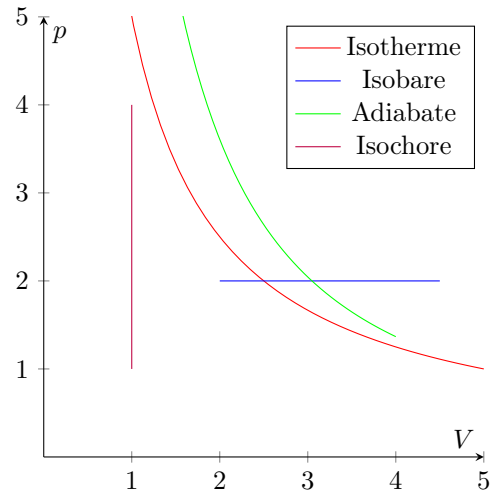


Abbildung 22: Verschiedene Zustandsänderungen eines idealen Gases im p - V Diagramm

Die einzelnen Prozesse können wir nun in einem p - V Diagramm darstellen.

Betrachten wir nun eine Kugel welche über einem Gas liegt und dadurch mit der Gravitation eine Kraft auf das Gas ausübt. Wenn wir die Kugel loslassen, so wird das Gas komprimiert und die Kugel bewegt sich nach unten. Danach expandiert das Gas wieder und die Kugel bewegt sich nach oben. Wir können schreiben

$$p_0 V^{\kappa} = p(z)(V + Az)^{\kappa}.$$

$$p(z) = \frac{p_0}{\left(1 + \frac{A}{V}z\right)^{\kappa}} \approx p_0 \left(1 - \kappa \frac{A}{V}z\right).$$

Die Bewegungsgleichung der Kugel ist somit

$$m\ddot{z} = A(p(z) - p_0) - mg \approx -\left(\kappa \frac{p_0 A^2}{V}\right)z - mg.$$

Unter geeigneter Koordinatenverschiebung erhalten wir

$$m\ddot{z} + 2m\delta\dot{z} + p_0\kappa \frac{A^2}{V}z = 0.$$

Somit ist die Eigenfrequenz

$$\omega_0 = \sqrt{\kappa \frac{p_0 A^2}{mV}}.$$

Eine andere Möglichkeit die Adiabatenexponente κ zu bestimmen, besteht aus der Temperaturänderung bei einer periodischen Kompression und Expansion des Gases. Hierzu wird das Gas in einem Zylinder mit einem Kolben eingeschlossen. Der Kolben wird durch eine Schwingung mit der Frequenz ω bewegt.

Für die innere Energie gilt $dU = \nu C_V dT$. Da die Zustandsänderung schnell erfolgt, gilt $\delta Q^{\sphericalangle} = 0$. Folglich ist

$$\nu C_V dT = \delta W^{\sphericalangle} = -pdV = -\frac{\nu RT}{V} dV.$$

Dies ist eine Differentialgleichung für $T(V)$:

$$\frac{dT}{T} = -\frac{R}{C_V} \frac{dV}{V} = -\frac{2}{f} \frac{dV}{V}.$$

Man kann dies nun optional integrieren:

$$C_V \frac{dT}{T} = -R \frac{dV}{V}$$

$$\int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = -\frac{R}{C_V} \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V}$$

$$\ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) = -(\kappa - 1) \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

$$T_2 = T_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\kappa-1}.$$

10.7 Wärmekraftmaschinen

Gegeben seien zwei Wärmereservoirs mit den Temperaturen T_W und T_K . Es ist nicht möglich, einen Prozess zu konstruieren, welcher Wärme $Q_W^<$ vom wärmeren Reservoir aufnimmt und vollständig in Arbeit $W^>$ umwandelt, ohne dass dabei Wärme $Q_K^<$ an das kältere Reservoir abgegeben wird.

Eine andere Formulierung des zweiten Hauptsatzes ist: Es ist nicht möglich, einen Prozess zu konstruieren, welcher Wärme $Q^<$ von einem kälteren Reservoir aufnimmt und vollständig an ein wärmeres Reservoir abgibt, ohne dass dabei Arbeit von außen verrichtet wird.

Wir möchten uns nun eine Wärmekraftmaschine betrachten, insbesondere den Carnot-Prozess. Dieser besteht aus einer isothermen Expansion, einer adiabatischen Expansion, einer isothermen Kompression, und einer adiabatischen Kompression.

Für die isotherme Expansion gilt leistet das Gas Arbeit an seiner Umgebung (Motor):

$$W_1^> = \int_{V_a}^{V_b} p dV = \nu RT_W \ln\left(\frac{V_b}{V_a}\right).$$

Die Wärmemenge, welche das Gas dabei aufnimmt, ist

$$Q_W^< = W_1^>.$$

Bei der Adiabatischen Expansion gilt

$$W_2^> = U_{2 \rightarrow 3} = \nu C_V (T_K - T_W).$$

Für die Wärme gilt hier $Q_{2 \rightarrow 3}^< = 0$.

Für die isotherme Kompression gilt

$$W_3^< = \int_{V_c}^{V_d} p dV = \nu RT_K \ln\left(\frac{V_d}{V_c}\right).$$

Wobei $Q_K^> = W_3^<$ die Wärme ist, welche an das kalte Reservoir abgegeben wird.

Bei der adiabatischen Kompression gilt

$$W_4^< = U_{4 \rightarrow 1} = \nu C_V (T_W - T_K).$$

Die Effizienz einer Wärmekraftmaschine ist definiert als

$$\eta_C = \frac{\text{Gewonnene Arbeit}}{\text{zugeführte Wärme}}.$$

Für den Carnot-Prozess gilt somit

$$\eta_C = \frac{\delta W_1^> + \delta W_2^> - \delta W_3^< - \delta W_4^<}{Q_W^<}.$$

Da die Arbeit im zweiten und vierten Schritt sich aufhebt, folgt

$$\eta_C = \frac{W_1^> - W_3^<}{Q_W^<} = \frac{T_W - T_K}{T_W}.$$

Betrachten wir nun eine Wärmepumpe. Hierbei wollen wir Wärme von einem kalten Reservoir auf ein warmes Reservoir übertragen mit einem Motor.

Die Effizienz einer Wärmepumpe ist definiert als

$$\eta_P = \frac{\text{abgegebene Wärme}}{\text{zugeführte Arbeit}}.$$

Setzen wir die Arbeit als $W^> = Q_K^< - Q_W^<$, so gilt für die Wärmepumpe

$$\eta_W = \frac{T_W}{T_W - T_K}.$$

Example 10.5:

Im kalten Winter bei 260 K möchten Sie ihr Haus auf 300 K heizen. Was ist die maximale Effizienz einer Wärmepumpe?

Solution. Wir verwenden die Formel für die Effizienz einer Wärmepumpe:

$$\eta_P = \frac{T_W}{T_W - T_K} = \frac{300}{300 - 260} = \frac{300}{40} = 7.5.$$

Die maximale Effizienz der Wärmepumpe beträgt also 7.5.

Analog für eine Kältemaschine:

$$\eta_K = \frac{T_K}{T_W - T_K}.$$

Eine andere WKM ist der Stirling-Motor. Dieser besteht aus zwei isothermen und zwei isochoren Prozessen. Berechnen wir nun ebenfalls die Effizienz dieses Motors.

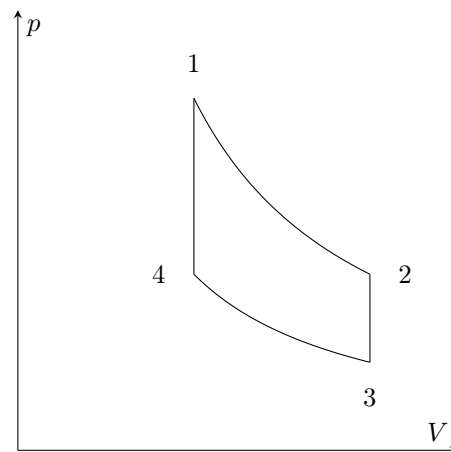


Abbildung 23: Stirling-Zyklus im p-V Diagramm

Für die isotherme Expansion bei $T = T_W$ gilt

$$Q_{1 \rightarrow 2}^< = W_{1 \rightarrow 2}^> = \nu RT_W \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right).$$

Das Gas leistet Arbeit an der Umgebung.

Für die Isochore Abkühlung gilt

$$dV = 0 \Rightarrow \delta W^< = 0.$$

Folglich ist nach dem ersten Hauptsatz

$$Q_{2 \rightarrow 3}^{\leftarrow} = \Delta U = \nu C_V (T_K - T_W) < 0.$$

Ähnlich für die isotherme Kompression bei $T = T_K$ gilt

$$Q_{3 \rightarrow 4}^{\rightarrow} = W_{3 \rightarrow 4}^{\leftarrow} = \nu RT_K \ln \left(\frac{V_4}{V_3} \right).$$

und für die isochore Erwärmung

$$Q_{4 \rightarrow 1}^{\leftarrow} = \Delta U = \nu C_V (T_W - T_K) > 0.$$

In diesem Fall können wir nun die Effizienz berechnen:

$$\begin{aligned} \eta_S &= \frac{W_{1 \rightarrow 2}^{\rightarrow} + W_{2 \rightarrow 3}^{\rightarrow} + W_{3 \rightarrow 4}^{\leftarrow} + W_{4 \rightarrow 1}^{\leftarrow}}{Q_{1 \rightarrow 2}^{\leftarrow}} \\ &= \frac{W_{1 \rightarrow 2}^{\rightarrow} - W_{3 \rightarrow 4}^{\leftarrow}}{Q_{1 \rightarrow 2}^{\leftarrow}} \\ &= \frac{\nu RT_W \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right) - \nu RT_K \ln \left(\frac{V_4}{V_3} \right)}{\nu RT_W \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right)} \\ &= \frac{T_W - T_K}{T_W} = \eta_C. \end{aligned}$$

10.8 Entropie

Gegeben sei ein System mit Volumen V_0 mit einem Teilbereich von Volumen V_1 . Die Wahrscheinlichkeit, ein Teilchen im Volumen V_1 zu finden, ist

$$W = \frac{V_1}{V_0}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass alle N Teilchen im Volumen V_1 sind, ist

$$W_N = W^N = \left(\frac{V_1}{V_0} \right)^N = \left(\frac{V_1}{V_0} \right)^{N_A \nu}.$$

Dies ist eine extrem kleine Zahl. Es ist also extrem unwahrscheinlich, dass alle Teilchen in einem kleinen Volumen sind.

Die Entropie ist definiert als

$$\Delta S = k \ln(W_N) = k N_A \nu \ln \left(\frac{V_1}{V_0} \right) = -R \nu \ln \left(\frac{V_0}{V_1} \right).$$

Wenn nun $\Delta S > 0$ ist, so geht das System in einen wahrscheinlicheren Zustand über. Dies ist der zweite Hauptsatz der Thermodynamik:

Theorem 10.6: Zweiter Hauptsatz der Thermodynamik

In einem abgeschlossenen System nimmt die Entropie entweder zu oder bleibt konstant. Sie kann niemals abnehmen.

$$\Delta S \geq 0.$$

Die Mathematische Formulierung der Entropieänderung ist

$$dS = \frac{\delta Q_{\text{rev}}^{\leftarrow}}{T}.$$

Für eine Isotherme gilt zum Beispiel aus dem Ersten Hauptsatz

$$\Delta S = \int dS = \int \frac{\delta Q_{\text{rev}}^{\leftarrow}}{T} = \frac{Q^{\leftarrow}}{T}.$$

Dies können wir umschreiben als

$$\Delta S = \frac{1}{T} \int_{V_a}^{V_e} p dV = \frac{Nk}{T} \int_{V_a}^{V_e} \frac{T}{V} dV = Nk \ln \left(\frac{V_e}{V_a} \right).$$

Wir definieren den **REVERSIBLEN KREISPROZESS** als einen Prozess, bei dem

$$\oint dS = \oint \frac{\delta Q_{\text{rev}}^{\leftarrow}}{T} = 0.$$

Für adiabatische Prozesse ist $\delta Q_{\text{rev}}^{\leftarrow} = 0$, folglich ist $\Delta S = 0$. Daher ist für den Carnot Prozess

$$\Delta S = \frac{Q_W^{\leftarrow}}{T_W} - \frac{Q_K^{\leftarrow}}{T_K} \geq 0.$$

Folglich ist

$$\frac{\delta Q_2}{\delta Q_1} \geq \frac{T_2}{T_1}.$$

Nach dem ersten Hauptsatz gilt

$$\delta Q_1 = \delta W^{\nearrow} + \delta Q_2.$$

Für den Wirkungsgrad einer Wärmekraftmaschine folgt somit

$$\eta = \frac{\delta W^{\nearrow}}{\delta Q_1} = 1 - \frac{\delta Q_2}{\delta Q_1} \leq 1 - \frac{T_2}{T_1}.$$

Wir fassen die Hauptsätze der Thermodynamik zusammen:

0. Hauptsatz: Wärme fließt von alleine nur vom warmen zum kalten Reservoir.

1. Hauptsatz: Energieerhaltung. $\Delta U = Q^{\leftarrow} + W^{\leftarrow}$.

2. Hauptsatz:

- Entropie des Gesamtsystems nimmt nur zu.
- Wärme kann nie zu 100% in Arbeit umgewandelt werden.
- Um Wärme vom kalten zum warmen Reservoir zu transportieren, muss Arbeit verrichtet werden.
- Der maximale Wirkungsgrad jeder Wärmekraftmaschine ist $\eta_{\text{max}} = \eta_{\text{Carnot}} = 1 - \frac{T_K}{T_W}$.

3. Hauptsatz: $T = 0$ kann nie erreicht werden.

10.9 Reale Gase und Flüssigkeiten

Für reale Gase gilt die Van-der-Waals-Gleichung, welche die ideale Gasgleichung erweitert:

Theorem 10.7: Van-der-Waals-Gleichung

Für ein reales Gas gilt:

$$\left(p + \frac{a\nu^2}{V^2} \right) (V - \nu b) = \nu RT.$$

Die Grösse $\frac{av^2}{V^2}$ heisst **BINNENDRUCK** und berücksichtigt die Anziehungskräfte zwischen den Molekülen. Die Grösse νb beschreibt das **EIGENVOLUMEN** der Gasteilchen.

Definiert man nun das **MOLVOLUMEN** als $V_m = \frac{V}{\nu}$, so wird die Van-der-Waals-Gleichung zu

$$\left(p + \frac{a}{V_m^2}\right)(V_m - b) = RT.$$

In einem idealen Gas ist $a = 0$ und $b = 0$.

Multipliziert man beide Seiten der Gleichung mit V_m^2 , so erhält man

$$pV_m^3 - (RT + bp)V_m^2 + aV_m - ab = 0.$$

In einem p - V_m Diagramm hat ein reales Gas eine Isotherme welche wie folgt aussieht: Um den kritischen Punkt zu

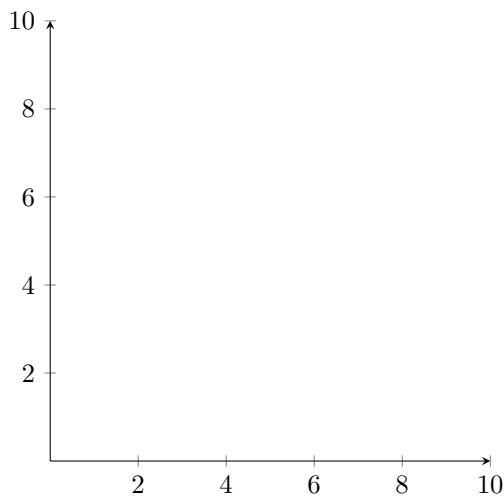


Abbildung 24: Van-der-Waals-Isotherme im p - V_m Diagramm

bestimmen, setzen wir die ersten beiden Ableitungen der Isotherme gleich null und finden so,

$$V_m^K = 3b \quad T^K = \frac{8a}{27Rb} \quad p^K = \frac{a}{27b^2}.$$