
Physik II

Sommersemester 2026

Lecture Notes

Inhaltsverzeichnis

1 Wellen	1
1.1 Harmonische Wellen	1
1.2 Superposition	4
1.3 Stehende Wellen	5
1.4 Dopplereffekt	5
2 Elektrostatik	6
2.1 Energie einer Ladungsverteilung	6
2.2 Das elektrische Feld	7
2.3 Das Gauss'sche Gesetz	7
2.4 Die Energie des elektrischen Feldes	8
2.5 Elektrisches Potential	8
2.6 Mathematisches Interlude	9
3 Elektrische Leiter	10
3.1 Kondensatoren	11
4 Elektrische Ströme	11
4.1 Ladungserhaltung	11
4.2 Schaltkreise	12
4.3 Energieumwandlung	12
5 Spezielle Relativitätstheorie	13
5.1 Raum und Zeit	14
5.2 Lorentz Transformation	15
5.3 Minkowski Diagramme	16
5.4 Masse, Energie und Impuls	16
5.5 Dopplereffekt	17
6 Felder bewegter Ladungen	18
6.1 Felder bewegter Ladungen	18
6.2 Beschleunigte Ladungen	18
6.3 Wechselwirkungen bewegter Ladungen	19
7 Magnetische Felder	20
7.1 Das Vektorpotential	21
8 Magnetische Induktion	23
8.1 Das Faraday'sche Induktionsgesetz	23
8.2 Gegenseitige Induktivität	24
8.3 Selbstinduktivität	24
9 Wechselströme	25
9.1 Wechselstromkreise	26
9.2 Leistungsaufnahme	27
9.3 Der Transformator	27
10 Maxwellgleichungen	28
10.1 Elektromagnetische Wellen	28

Literatur

[1] Wallny, Rainer: Wellenlehre, Elektrizität und Magnetismus. ETH Zürich, 2026

Physik II

Fynn Krebsler—fkrebsler@student.ethz.ch

Frühlingssemester 2026

Lec 1

1 Wellen

Um über Wellen zu sprechen, müssen wir zuerst auf eine Arbeitsdefinition einigen.

Definition 1.1: Welle

Eine **WELLE** ist eine zeitliche und räumliche Störung.

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit \mathbf{v} einer Welle ist die Geschwindigkeit, mit der sich die Störung ausbreitet. Damit verbunden ist ein Energieübertrag aber KEIN Materietransport.

Eine Welle wird durch die Wellenfunktion $\xi(x, t)$ beschrieben, welche die Auslenkung des Oszillators um die Ruhelage bei Ort x und Zeit t angibt.

Prinzipiell gibt es zwei Möglichkeiten, in welche Richtung eine Auslenkung stattfinden kann: Senkrecht zur Ausbreitungsrichtung **TRANSVERSAL** oder parallel zur Ausbreitungsrichtung **LONGITUDINAL**.

Wenn wir uns eine Welle als Feder-Masse System vorstellen, dann schwingt jede Masse um ihre Ruhelage und kehrt schliesslich in ihre Ruhelage zurück.

Eine Welle kann auf zwei Arten dargestellt werden: Einmal in einem ξ - x Diagramm, welches die Auslenkung ξ als Funktion des Ortes x zu einem festen Zeitpunkt t zeigt, oder in einem ξ - t Diagramm, welches die Auslenkung ξ als Funktion der Zeit t an einem festen Ort x zeigt.

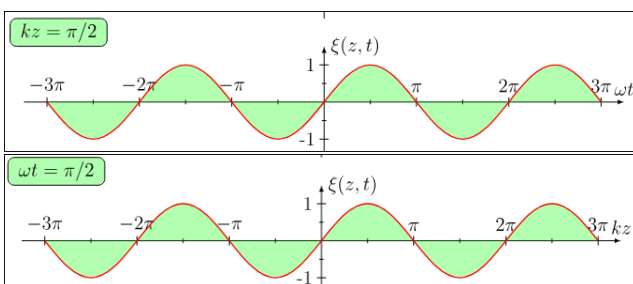


Abbildung 1: Oben: ξ - x Diagramm, Unten: ξ - t Diagramm

Üblicherweise verändert sich die Form eines Wellenberges mit der Zeit, dies wird **DISPERSION** genannt. Um die Rechnung zu vereinfachen, nehmen wir an, dass dies nicht passiert, also dass wir

$$\xi(x, t) = f(x \pm vt),$$

schreiben können. Hierbei zeigt das Minuszeichen dass die Welle nach Rechts geht und das bei Pluszeichen die Welle nach Links geht.

Proof. Wir gehen in ein Inertialsystem Σ' welches sich mit dem Wellenberg fortbewegt. In diesem System ist die Welle stationär, also

$\xi(x', t') = f(x')$. Anwendung der Galilei-Transformation $x' = x - vt$ und $t' = t$ ergibt die Behauptung. \square

In obiger Formel ist v sowohl die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle als auch die **PHASENGESCHWINDIGKEIT**.

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit hängt ab vom Massenbelag sowie der Rückstellkraft der Feder. Die Phasengeschwindigkeit beschreibt die Geschwindigkeit, mit der sich die Wellenberge fortbewegen. Wir nennen $x \mp vt$ die **PHASE** δ_0 der Welle. Sei x die Koordinate des Wellenberges zur Zeit t . Nehmen wir nun an, dass die Phase δ_0 konstant bleibt, also $\delta_0 = x \mp vt = \text{const}$, so folgt durch Ableiten $\dot{x} = v$. Dies motiviert dass die Phasengeschwindigkeit v der Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle entspricht.

1.1 Harmonische Wellen

Der Spezialfall einer Harmonischen Welle ist gegeben durch

$$\xi(x, t) = \xi_0 \sin[k(x \pm vt)].$$

Hierbei wird k als **WELLENZAHL** bezeichnet. In dieser Situation vollführt jeder Oszillator eine harmonische Schwingung aus. Weiter definieren wir die **WELLENLÄNGE** λ als den Abstand zwischen zwei Oszillatoren gleicher Phase, also

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}.$$

Lec 2

Proof. ObDA können wir die Welle bei $t = 0$ betrachten, also $\xi(x, 0) = \xi_0 \sin(kx)$. Nach der Definition der Wellenlänge muss $k(x+\lambda) = kx+2\pi$ gelten, was die obige Formel für λ ergibt. \square

Betrachten wir nun die Welle bei $t = 0$, also ist

$$\xi(x', t_0 = 0) = \xi_0 \sin\left(2\pi \frac{x'}{\lambda}\right).$$

Wenn wir nun die Welle verschieben, können wir $x' = x \pm vt$ einsetzen und erhalten

$$\xi(x, t) = \xi_0 \sin\left(2\pi \frac{x \pm vt}{\lambda}\right) = \xi_0 \sin\left(2\pi \frac{x}{\lambda} \pm \frac{2\pi v}{\lambda} t\right).$$

Nehmen wir nun das spezielle $x = \lambda$, so erhalten wir

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\lambda}{T} = \frac{2\pi\lambda}{2\pi T} = \frac{\omega}{k}.$$

Setzen wir nun $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ein so erhalten wir

$$\xi(x, t) = \xi_0 \sin(kx \pm \omega t).$$

Um die Formel zu verallgemeinern fügen wir den **NULL-PHASENWINKEL** φ_0 hinzu und erhalten

$$\xi(x, t) = \xi_0 \sin(kx \pm \omega t + \varphi_0).$$

Leiten wir die Phase ab, so erhalten wir als Phasengeschwindigkeit

$$v = \frac{d}{dt}(kx \pm \omega t + \varphi_0) = \frac{\omega}{k}.$$

Um Rechnungen zu vereinfachen, können wir die komplexe Darstellung der Welle verwenden, also

$$\xi(x, t) = \xi_0 e^{i(kx \pm \omega t + \varphi_0)}.$$

Dabei entspricht die reale Komponente der komplexen Darstellung der Welle der ursprünglichen Welle.

Wenn wir zwei Oszillatoren betrachten, welche sich bei x_1 und x_2 befinden, so beträgt die Phasendifferenz

$$\Delta\varphi = k\Delta x > 0 \Rightarrow \omega = \dot{\varphi} = k\dot{x} = kv.$$

Theorem 1.2: Wellengleichung

Eine Wellengleichung wird beschrieben durch

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0.$$

Proof. Wir betrachten die Wellengleichung welche in positive x -Richtung läuft, also

$$\xi(x, t) = \xi_0 \sin(kx - \omega t).$$

Leiten wir dies zweimal nach der Zeit ab, so erhalten wir

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\xi_0 \omega^2 \sin(kx - \omega t).$$

Leiten wir die Ursprüngliche Welle zweimal nach x ab, so erhalten wir

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = -\xi_0 k^2 \sin(kx - \omega t).$$

Wir bemerken nun, dass

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\omega^2}{k^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}.$$

Hierbei sollten die Lösungen der Wellengleichung 2 mal stetig differenzierbar sein. □

Theorem 1.3: Lösung der Wellengleichung

Die allgemeine Lösung der Wellengleichung ist gegeben durch

$$\xi(x, t) = f(x - vt) + g(x + vt).$$

Der erste Term beschreibt eine Welle welche sich in positive x -Richtung bewegt, während der zweite Term eine Welle beschreibt welche sich in negative x -Richtung bewegt.

Beispiele beinhalten die Seilwelle, die Schallwelle, aber auch die elektromagnetische Welle.

Kehren wir zu transversalen Wellen zurück. Hierbei ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit \mathbf{v} senkrecht zur Auslenkung ξ .

$$\xi(z, t) = \mathbf{A} f(z - vt).$$

Explizit könne wir schreiben

$$\xi(z, t) = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ 0 \end{pmatrix} \cos(kz - \omega t).$$

Wir wollen nun das Beispiel der transversalen Seilwelle betrachten. Von was, hängt \mathbf{v} ab?.

INPUT PICTURE

Wir betrachten das Seil an den Punkten x und $x + dx$.

Zunächst definieren wir die **ZUGSPANNUNG** $\mathbf{S} = \frac{\mathbf{F}}{A}$, welche die Kraft pro Querschnittsfläche beschreibt.

Der Betrag der Spannung im Seil muss überall gleich sein, da sonst das Seil an der Stelle mit der grössten Spannung reissen würde. Weiter nehmen wir an, dass dm in Ruhe bleibt.

$$\Delta S_x = S \cos(\alpha') - S \cos(\alpha) \approx 0$$

$$\Delta S_y = S \sin(\alpha') - S \sin(\alpha).$$

Für den Tangens finden wir

$$\tan(\alpha) = \frac{\partial \xi(x, t)}{\partial x} \quad \tan(\alpha') = \frac{\partial \xi(x + dx, t)}{\partial x}.$$

Da $\sin \approx \tan$ für kleine Winkel gilt, können wir schreiben

$$\Delta S_y = S \left(\frac{\partial \xi(x + dx, t)}{\partial x} - \frac{\partial \xi(x, t)}{\partial x} \right) = S \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} dx.$$

Verwenden wir nun $dS_y \cdot A = dma_y$, so erhalten wir schliesslich die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - \frac{S}{\rho} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0.$$

Folglich ist

$$v = \pm \sqrt{\frac{S}{\rho}} = \pm \sqrt{\frac{T}{\mu}}.$$

Wobei μ der lineare **MASSENBELAG** ist, also die Masse pro Länge.

Wir wollen unsere Konzepte nun auf mehrere Dimensionen erweitern. Zunächst auf Ebene Wellen. Die Wellenzahl wird neu zum **WELLENVEKTOR** \mathbf{k} , welcher die Richtung der Ausbreitung der Welle angibt. Die Phase wird neu zu $\delta = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t$.

Folglich wird die harmonische Welle beschrieben durch

$$\xi(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}.$$

Definition 1.4: Ebene Welle

Der Geometrische Ort von Oszillatoren gleicher Phase ist eine Eben senkrecht zur Ausbreitungsgeschwindigkeit. Weiter ist $\mathbf{v} \parallel \mathbf{k}$.

Diese Ebenen werden **WELLENFRONTEN** oder **PHASENFLÄCHEN** genannt.

Lec 3

Für eine ebene Harmonische Welle gilt die Wellengleichung

$$\xi(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}.$$

Betrachten wir nun Zwei Punkte \mathbf{r}_1 und \mathbf{r}_2 in einer Ebene. Also $P_1, P_2 \in E \perp \mathbf{k}$. Da sie in Phase sind, gilt

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_1 - \omega t = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_2 - \omega t \Rightarrow \mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = 0.$$

Dies zeigt, dass $\mathbf{k} \perp E$ gilt, also dass die Wellenfronten Ebenen sind welche senkrecht zum Wellenvektor stehen.

Wir verwenden im folgenden die Konvention, dass

$$\mathbf{r}_{21} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1.$$

Für eine ebene transversale Welle gilt

$$\xi(\mathbf{r}, t) = \begin{pmatrix} \tilde{A}_x \\ \tilde{A}_y \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(kz - \omega t)}.$$

ObdA können wir dies vereinfachen zu

$$\xi(\mathbf{r}, t) = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y e^{i\Delta\delta} \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(kz - \omega t)}.$$

Definition 1.5: lineare Polarisation

Wenn $\Delta\delta = 0$ oder π gilt, so ist die Welle linear polarisiert.

$$\xi(\mathbf{r}, t) = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(kz - \omega t)}.$$

Definition 1.6: zirkulare Polarisation

Wenn $\Delta\delta = \pm\frac{\pi}{2}$ gilt, und $A_x = A_y$ gilt, so ist die Welle zirkular polarisiert.

$$\xi(\mathbf{r}, t) = A \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(kz - \omega t)}.$$

Bei positivem Vorzeichen wird die Welle zB bei $z = 0$ zu

$$\xi(z = 0, t) = A_0 \cos(\omega t)\hat{x} + A_0 \sin(\omega t)\hat{y}.$$

Bei negativem Vorzeichen wird die Welle zu

$$\xi(z = 0, t) = A_0 \cos(\omega t)\hat{x} - A_0 \sin(\omega t)\hat{y}.$$

Wir nennen die Welle **RECHTSZIRKULAR** wenn $\Delta\delta = +\frac{\pi}{2}$ gilt, und **LINKSZIRKULAR** wenn $\Delta\delta = -\frac{\pi}{2}$ gilt.

Der allgemeine Fall ist die elliptische Polarisation, bei welchem sich die Spitze des Auslenkungsvektors auf einer Ellipse bewegt.

Im Raum, verallgemeinert sich die Wellengleichung wie folgt

Definition 1.7: Wellengleichung im Raum

Eine Wellengleichung im Raum wird beschrieben durch

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - v^2 \nabla^2 \xi = 0.$$

In Kugelkoordinaten wird die Wellengleichung zu (im Fall von radialsymmetrischen Wellen)

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \xi.$$

Die Lösung dieser Gleichung ist gegeben durch¹

$$\mathbf{x}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{A}_1}{r} f_1(kr - \omega t) + \frac{\mathbf{A}_2}{r} f_2(kr + \omega t).$$

¹In 2 Dimensionen wäre die Amplitude proportional zu $\frac{1}{\sqrt{r}}$

Gehen wir nun zurück zum eindimensionalen Fall mit einer transversalen Welle. Die Geschwindigkeit eines einzelnen Oszillators ist gegeben durch

$$v_\xi = \frac{\partial \xi}{\partial t}.$$

Die kinetische Energie eines Massenelements dm ist gegeben durch

$$dT = \frac{1}{2} v^2 dm.$$

Einsetzen von $dm = \rho dV$ gibt

$$\frac{dT}{dV} = \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2.$$

Dies ist die kinetische Energiedichte der Welle. Sie gibt an wie viel kinetische Energie pro Volumen in der Welle gespeichert ist.

Für die elastische Energiedichte haben wir eine elongierte Feder, welche die Längenänderung

$$ds = \sqrt{dx^2 + d\xi^2} - dx \approx \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 dx.$$

Folglich ist die elastische Energiedichte

$$\frac{dE_{el}}{dV} = \frac{1}{2} S \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2.$$

Wie teilt sich nun die Energie auf die beiden Freiheitsgrade auf? Es gilt für eine Welle

$$\xi(x, t) = f(x - vt).$$

Folglich können wir rechnen

$$\frac{dT}{dV} = \frac{1}{2} \rho v^2 \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 = -v \frac{\partial f}{\partial (x - vt)}.$$

Ebenso können wir rechnen

$$\frac{dE_{el}}{dV} = \frac{1}{2} S \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 = v \frac{\partial f}{\partial (x - vt)}.$$

$$\frac{dW}{dV} = \frac{dT}{dV} + \frac{dE_{el}}{dV} = \rho v^2 \left(\frac{\partial f}{\partial (x - vt)} \right)^2.$$

Lec 4

Diese Gleichung gilt nur für mechanische Wellen. Wir fassen zusammen:

Tabelle 1: Mechanische Wellen

Typ	Ausbreitungsgeschwindigkeit
Seilwelle	$v = \sqrt{\frac{S}{\rho}}$
Welle im Festkörper	$v_L = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$
	$v_T = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$
Schallwelle	$v = \sqrt{\frac{\kappa}{\rho}}$
	$\kappa = \nu P$

Wir möchten nun über die Intensität I und die Energieflussdicht \mathbf{S} einer Welle sprechen, wobei $|\mathbf{S}| = I$ gilt.

Als Beispiel nehmen wir eine harmonisch Fortschreitende Welle

$$\xi(x, t) = A \cos(kx - \omega t) \quad v = \frac{\omega}{k}.$$

Die Energiedichte ist wie vorher berechnet gegeben durch

$$\frac{dW}{dV} = \rho v^2 \xi'^2.$$

Wobei $\xi' = \frac{\partial f}{\partial(x-vt)} = k \frac{\partial \xi}{\partial(x-vt)}$. Wenn wir dies ausrechnen, so erhalten wir

$$\frac{dW}{dV} = \rho v^2 k^2 A^2 \sin^2(kx - \omega t) = A^2 \rho \omega^2 \sin^2(kx - \omega t).$$

Dies hat auch eine Form von $f(x - vt)$. Also wird Energie transportiert bei einem Wellenphänomen. Jedoch ist die Energiedichte positiv definit. Weiter ist die Energie proportional zu A^2 und ω^2 .

Das zeitliche Mittel der Energiedichte ist gegeben durch

$$\langle \frac{dW}{dV} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{dW}{dV} dt = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2.$$

Die Intensität ist nun Definiert als die Leistung, welche durch eine Fläche A senkrecht zur Ausbreitungsrichtung transportiert wird, pro Flächeneinheit. Also

$$I = \frac{d^2W}{dadt}.$$

Umformen gibt

$$\begin{aligned} I &= \frac{d^2W}{dadx \frac{dt}{dx}} \\ &= \frac{dW}{dV} v \\ &\cdot \end{aligned}$$

wobei wir ein wenig schludern und das d^2W durch dW ersetzen, lol.

Eine weitere legitime Frage ist was passiert wenn wir eine komplizierte Oberfläche haben. In diesem Fall definieren wir den **POYNTING VEKTOR** \mathbf{S} , welcher die Stärke von I hat und die Richtung von k . Dann gilt

$$\frac{dW}{dt} = \iint_A \mathbf{S} \cdot d\mathbf{a}.$$

Für eine Kugelwelle mit Oberfläche einer Kugel mit Radius r sehen wir, dass

$$\dot{W} = 2\pi \rho \omega^2 A_0^2 v.$$

Somit hängt die Leistung nicht von r ab, was die Energieerhaltung bestätigt.

1.2 Superposition

Wenn ξ_1 und ξ_2 Lösungen der Wellengleichung sind, so ist auch $\xi = \xi_1 + \xi_2$ eine Lösung der Wellengleichung. Dies wird als Superposition bezeichnet.

Betrachten wir zunächst die Überlagerung zweier harmonischen Wellen in einem eindimensionalen Raum.

$$\begin{aligned} \xi_1(x, t) &= A \cos(kx - \omega t) \\ \xi_2(x, t) &= A \cos(kx \mp \omega t + \delta). \end{aligned}$$

Im ersten Fall betrachten wir, wenn beide Wellen in die gleiche Richtung laufen. Ausserdem seien der Einfachheit die Amplituden gleich. Dann können wir rechnen

$$\begin{aligned} \xi(x, t) &= \xi_1 + \xi_2 \\ &= A \sin(kx - \omega t) + A \sin(kx - \omega t + \delta) \\ &= 2A \cos\left(\frac{\delta}{2}\right) \sin\left(kx - \omega t - \frac{\delta}{2}\right). \end{aligned}$$

Wir sehen, dass die Amplitude maximal ist, wenn $\delta = 0, 2\pi, 4\pi, \dots$ gilt, und dass die Amplitude minimal (gleich null) ist, wenn $\delta = \pi, 3\pi, 5\pi, \dots$ gilt. Dies wird als **KONSTRUKTIVE INTERFERENZ** bzw **DESTRUKTIVE INTERFERENZ** bezeichnet.

Wenn die Wellen gegenläufig laufen, so können wir rechnen

$$\begin{aligned} \xi(x, t) &= \xi_1 + \xi_2 \\ &= A \sin(kx - \omega t) + A \sin(kx + \omega t + \delta) \\ &= 2A \sin\left(kx + \frac{\delta}{2}\right) \cos\left(\omega t + \frac{\delta}{2}\right). \end{aligned}$$

Wenn wir nun zwei Wellen haben, welche von einem Punkt Q_1 und Q_2 ausgehen, so gilt an einem Punkt P :

$$\xi(x, t) = A(\sin(kx_1 - \omega t) + \sin(kx_2 - \omega t + \delta)).$$

Wir definieren den **GANGUNTERSCHIED** Δx als

$$\Delta x = x_2 - x_1.$$

Wenn wir nun $x := x_1$ und $x + \Delta x := x_2$ setzen, so können wir rechnen

$$\begin{aligned} \xi(x, t) &= A(\sin(kx - \omega t) + \sin(k(x + \Delta x) - \omega t + \delta)) \\ &= 2A \cos\left(\frac{k\Delta x + \delta}{2}\right) \sin\left(kx - \omega t + \frac{k\Delta x + \delta}{2}\right). \end{aligned}$$

Konstruktive Interferenz tritt auf, wenn $k\Delta x + \delta = 2\pi n$ gilt, also wenn

$$\Delta x = \frac{2\pi n - \delta}{k} = n\lambda - \frac{\delta}{k}.$$

Destruktive Interferenz tritt auf, wenn $k\Delta x + \delta = (2n+1)\pi$ gilt, also wenn

$$\Delta x = \frac{(2n+1)\pi - \delta}{k} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\lambda - \frac{\delta}{k}.$$

Damit Interferenz überhaupt stattfinden kann, müssen die zeitliche und räumliche Kohärenz gegeben sein. Die zeitliche Kohärenz bedeutet, dass der Nullphasenwinkel δ konstant bleibt, also dass die Wellen eine feste Phasendifferenz haben. Die räumliche Kohärenz bedeutet, dass die Wellen überhaupt eine Chance haben zu interferieren, also dass die Wellenfronten sich überlappen.

Wenn eine Welle auf ein Hindernis trifft, wird sie reflektiert. Dabei wird unterschieden zwischen einem fixen und offenen Ende. Bei einem fixen Ende wird die Welle mit einem Phasenunterschied von π reflektiert. Bei einem offenen Ende wird die Welle ohne Phasenunterschied reflektiert.

Wenn eine Welle nun aber auf so eine Grenzfläche trifft, so wird sie nicht nur reflektiert, sondern auch transmittiert,

also durchgelassen. Dies kann in einem Seil zum Beispiel durch eine Änderung des Massenbelags realisiert werden.

Folglich existieren 3 Wellen.

$$\begin{aligned}\xi_A &= A \exp(i(+k_1x - \omega t)) \\ \xi_R &= R \exp(i(-k_1x - \omega t + \delta_R)) \\ \xi_T &= T \exp(i(+k_2x - \omega t + \delta_T)).\end{aligned}$$

Eine Sinnvolle Annahme ist, dass die Wellen an der Grenzfläche $x = 0$ stetig sind, also dass

$$\xi_A(0, t) + \xi_R(0, t) = \xi_T(0, t).$$

Weiter müssen die Kräfte an der Grenzfläche ebenfalls stetig sein, also dass

$$S_1 \frac{\partial}{\partial x} (\xi_A + \xi_R) = S_2 \frac{\partial}{\partial x} \xi_T.$$

Nach rechnen (siehe Serie), erhalten wir den Parameter

$$\alpha = \sqrt{\frac{S_2 \rho_2}{S_1 \rho_1}}.$$

Dieser Parameter gibt an wie stark die Welle reflektiert bzw transmittiert wird. Es gilt für die Parameter δ_R und δ_T :

$$\begin{aligned}\delta_R &= \begin{cases} 0 & \alpha < 1 \\ \pi & \alpha > 1 \end{cases} \\ \delta_T &= 0.\end{aligned}$$

Hierbei entspricht der Fall von einem "dünnen Ende zu einem Dichten gehen ist $\delta_R = \pi$ und der Fall von einem "dicken Ende zu einem dünnen Ende ist $\delta_R = 0$. Dies entspricht intuitiv der Tatsache, dass die Welle an einem fixen Ende mit einem Phasenunterschied von π reflektiert wird, und an einem offenen Ende ohne Phasenunterschied reflektiert wird.

Für die Amplituden R und T gilt

$$A^2 = R^2 + \frac{v_1}{v_2} T^2.$$

1.3 Stehende Wellen

Wir betrachten nun 2 eindimensionale fortschreitende Wellen welche in entgegengesetzte Richtungen laufen. Es gilt

$$\begin{aligned}\xi_1(x, t) &= A \cos(kx - \omega t) \\ \xi_2(x, t) &= A \cos(kx + \omega t + \delta).\end{aligned}$$

Wir können die Zweite Welle noch umschreiben zu

$$\xi_2(x, t) = A \cos(-kx - \omega t + \delta_R).$$

Die Superposition der beiden Wellen ist gegeben durch

$$\xi(x, t) = 2A \cos\left(kx - \frac{\delta_R}{2}\right) \cos\left(\omega t - \frac{\delta_R}{2}\right).$$

Wenn wir für die gegenläufige Welle eine Reflexion an einem harten Ende betrachten, so gilt $\delta_R = \pi$. Somit erhalten wir

$$\xi(x, t) = 2A \sin(kx) \sin(\omega t).$$

In diesem Fall haben wir bei $x = 0$ und $x = L$ einen Knoten.

Wenn wir für die gegenläufige Welle eine Reflexion an einem offenen Ende betrachten, so gilt $\delta_R = 0$. Somit erhalten wir

$$\xi(x, t) = 2A \cos(kx) \cos(\omega t).$$

In diesem Fall haben wir bei $x = 0$ und $x = L$ einen Bauch.

Für die Energiedichte einer stehenden Welle gilt

$$\frac{dT}{dV} = \frac{1}{2} \rho \omega^2 4A^2 \cos^2(kx) \sin^2(\omega t).$$

Und für die elastische Energiedichte gilt

$$\frac{dE_{el}}{dV} = \frac{1}{2} S 4A^2 k^2 \sin^2(kx) \cos^2(\omega t).$$

Wenn man dies plotten würde, so sehen wir, dass die kinetische und elastische Energie sich gegenseitig austauschen, aber dass die Gesamtenergie konstant bleibt.

Bei einer Reflexion am fixen Ende gilt: Für $\omega t = n\pi$ ist $\xi = 0$ und für $\omega t = (n + \frac{1}{2})\pi$ ist ξ maximal und nur elastisch.

Die Einhüllende ist gegeben durch

$$u(x) = a \cos(kx) + B \sin(kx).$$

Bei einer fest eingespannten Saite gilt $u(0) = u(L) = 0$. Dies führt zu der Bedingung

$$\sin(k_n l) = 0.$$

Also $k_n = \frac{n\pi}{L}$, und somit $\omega_n = \frac{n\pi v}{L}$, und die Wellenlänge ist gegeben durch $\lambda_n = \frac{2L}{n}$.

Hierbei sind nur diskrete Werte von k und ω erlaubt, welche als Eigenfrequenzen bezeichnet werden.

Ähnlich ist die Situation bei 2 offenen Enden, wobei die Eigenfrequenzen die gleichen sind, aber die Eigenmoden sich unterscheiden.

Bei nur einer Seite offen, und der anderen Seite geschlossen, so gilt die Bedingung

$$\sin(k_n L) = 0 \quad \text{und} \quad \cos(k_n L) = 0.$$

Dies führt zu der Bedingung

$$k_n = \frac{(2n+1)\pi}{2L}.$$

1.4 Dopplereffekt

Schallwellen sind Longitudinale Druckwellen, welche sich in einem Medium ausbreiten.

Der Dopplereffekt nimmt sich 3 Bezugssysteme zur Hand, dies des Senders, des Empfängers und des Mediums.

Für eine Wahrgenommene Frequenz eines Senders, welcher sich mit der Geschwindigkeit v_Q bewegt, gilt und eines Beobachters, welcher sich mit der Geschwindigkeit v_B bewegt, gilt

$$f' = f_Q \frac{u \pm v_B}{u \mp v_Q}.$$

Wir wollen dies nun motivieren. Dazu betrachten wir zunächst die Situation, dass der Sender sich nicht bewegt,

also $v_Q = 0$ gilt. Die Anzahl Wellenberge für einen ruhenden Beobachter ist

$$n_\lambda = f_Q \Delta t.$$

Die Anzahl Wellenberge für einen bewegten Beobachter ist

$$n'_\lambda = f_Q \Delta + \frac{v_B \cdot \Delta t}{\lambda}.$$

Wobei dies für einen Beobachter gilt, welcher sich auf den Sender zu bewegt. Für einen Beobachter, welcher sich von dem Sender weg bewegt, ist ein Minuszeichen vor dem zweiten Term.

Da die Schallgeschwindigkeit u gegeben ist durch $u = f_Q \lambda$, können wir umformen zu

$$f' = f_Q + f_Q \frac{v_B}{u} = f_Q \frac{u + v_B}{u}.$$

Analog finden wir, wenn sich die Quelle bewegt, dass

$$f' = f_Q \frac{u}{u - v_Q}.$$

Wobei dies für eine Quelle gilt, welche sich auf den Beobachter zu bewegt. Für eine Quelle, welche sich von dem Beobachter weg bewegt, ist ein Minuszeichen vor v_Q .

2 Elektrostatik

In der Elektrostatik beschäftigen wir uns mit elektrischen **LADUNGEN** welche sich in Ruhe befinden. Empirisch wissen wir, dass es 2 Arten von Ladungen gibt, welche wir als + und - bezeichnen. Gleichnamige Ladungen stossen sich ab, entgegengesetzte Ladungen ziehen sich an.

Die Menge von Ladungen können mit einem Elektroskop gemessen werden, welches eine Ladung durch die Abweichung von 2 Metallblättern anzeigt. Dabei kann auch das Phänomen der **INFLUENZ** beobachtet werden, welches besagt, dass eine Ladung in der Nähe eines leitenden Körpers eine Ladung auf diesem induzieren kann, welche die gleiche Ladung wie die ursprüngliche Ladung hat aber mit entgegengesetztem Vorzeichen.

Das moderne Bild ist das wir das Elektron haben, welches die Ladung $-e$ trägt, wobei $e = 1.602 \cdot 10^{-19} C$ gilt.

Ladung bleibt immer erhalten, das heisst die Summe aller Ladungen in einem abgeschlossenen System bleibt konstant.

Wir schreiben Linienladungen als $\lambda = \frac{dq}{dx}$, Flächenladungen als $\sigma = \frac{dq}{dA}$ und Volumenladungen als $\rho = \frac{dq}{dV}$.

Leiter sind Objekt, in welchen sich Teilchen frei bewegen können, während in Isolatoren Ladungen kleben bleiben.

Eines der Zentralen Gesetze der Elektrostatik ist das Coulombsche Gesetz.

Theorem 2.1: Coulomb'sches Gesetz

Die Kraft zwischen 2 Punktladungen q_1 und q_2 im Vakuum ist gegeben durch

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}.$$

Ausserdem ist das Superpositionsprinzip von fundamentaler Bedeutung. Es besagt, dass die Kraft auf eine Ladung q durch mehrere andere Ladungen die Summe der Kräfte ist, welche durch jede einzelne Ladung verursacht wird.

Die Stärke der elektrischen Kraft ist um viele Grössenordnungen stärker als die Stärke der Gravitationskraft.

2.1 Energie einer Ladungsverteilung

Energie ist gespeicherte Arbeit in einem System. Wir definieren eine externe Arbeit W_{ext} , als die Arbeit, welche von einer externen Kraft auf das System verrichtet. Sie ist positiv, wenn die externe Kraft Arbeit verrichtet, und negativ, wenn die externe Kraft Arbeit verrichtet bekommt.

Nehmen wir OBdA an, dass $q_1, q_2 > 0$. Die erste Ladung können wir einfach hinstellen, es gibt keine Arbeit, welche von einer externen Kraft verrichtet werden muss.

Bei der zweiten Ladung müssen wir eine Arbeit verrichten, um sie von unendlich nach r zu bringen. Diese Arbeit ist gegeben durch

$$W = \int_{\infty}^{r_{21}} \mathbf{F}_{\text{ext}} \cdot d\mathbf{s} = - \int_{\infty}^{r_{21}} \mathbf{F}_{21} \cdot d\mathbf{s}.$$

Wenn wir den direkten Weg von unendlich nach r nehmen, so gilt $ds = \hat{r}_{21} dr$. Wir können dies tun, da die senkrechte Komponente der Kraft keinen Beitrag zur Arbeit leisten würde, weshalb dieser spezifische Weg gewählt werden kann. Somit erhalten wir

$$W = - \int_{\infty}^{r_{21}} k \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}_{21} \cdot \hat{r}_{21} dr = k \frac{q_1 q_2}{r_{21}}.$$

Im allgemeinen finden wir für N Ladungen, dass die Energie gegeben ist durch

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \sum_j \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}.$$

2.2 Das elektrische Feld

Die Fernwirkung von Ladungen kann durch das Konzept des elektrischen Feldes erklärt werden.

Definition 2.2: Elektrisches Feld

Das elektrische Feld \mathbf{E} an einem Punkt im Raum ist definiert als die Kraft pro Ladung, welche auf eine Testladung q an diesem Punkt wirkt, wenn q gegen null geht. Also

$$\mathbf{E} = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}}{q}.$$

Per Konvention ist dabei die Testladung positiv, damit die Richtung des elektrischen Feldes mit der Richtung der Kraft übereinstimmt.

Wenn wir die Feldlinien einzeichnen, so gilt, dass die Dichte der Feldlinien proportional zur Stärke des elektrischen Feldes ist, und dass die Richtung der Feldlinien die Richtung des elektrischen Feldes angibt. Also zeigen die Feldlinien von positiven Ladungen weg, und zu negativen Ladungen hin.

Ausserdem beginnen und Enden die Feldlinien immer an Ladungen, oder gehen ins Unendliche.

Für eine Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{r})$ ist das elektrische Feld gegeben durch

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \hat{r} dV'.$$

Wichtig ist, dass diese Formel nur im elektrostatischen Fall gilt.

Lec 7

2.3 Das Gauss'sche Gesetz

Das Gauss'sche Gesetz ist unsere erste Maxwell Gleichung. Wir können damit das elektrische Feld für einen hochsymmetrischen Fall finden.

Wir haben bereits gesagt, dass der Betrag des elektrischen Feldes proportional zur Anzahl Feldlinien pro Flächeneinheit ist. Wir definieren nun

Definition 2.3: Elektrischer Fluss

Der Elektrische Fluss Φ_E durch eine Fläche A ist definiert als

$$\Phi_E = \iint_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a}.$$

In Worten ist der Elektrische Fluss die Anzahl der Feldlinien, welche durch die Fläche A gehen.

Wenn wir nun einen Würfel in einem homogenen elektrischen Feld platzieren, so sehen wir dass die Anzahl der Feldlinien, welche in den Würfel hinein gehen, gleich der Anzahl der Feldlinien ist, welche aus dem Würfel heraus gehen. Also

$$\Phi_E = \oiint_{\partial V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = 0.$$

Doch was, wenn wir eine Ladung in unser Volumen legen. Nehmen wir an, wir platzieren eine Punktladung in eine Kugel. Dann können wir rechnen

$$\begin{aligned} \Phi_E &= \oiint_{\partial V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} \\ &= \oiint_{\partial V} k \frac{q}{r^2} \hat{r} \cdot \hat{r} r^2 \sin\theta d\theta d\phi \\ &= 4\pi k q = \frac{q}{\epsilon_0}. \end{aligned}$$

Dies motiviert das Gauss'sche Gesetz, welches besagt, dass der Elektrische Fluss durch eine geschlossene Fläche gleich der eingeschlossenen Ladung geteilt durch ϵ_0 ist. Also

Theorem 2.4: Gauss'sches Gesetz

Es gilt

$$\oiint_{\partial V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0}.$$

Als erstes Beispiel betrachten wir eine Kugelschale mit homogener Ladungsverteilung. Aus Symmetriegründen muss das elektrische Feld radial sein, also $\mathbf{E} = E(r)\hat{r}$ gilt. Für $r < R$ gilt

$$\Phi_E = 4\pi r^2 E(r) = 0 \Rightarrow E(r) = 0.$$

Für $r > R$ gilt

$$\begin{aligned} \oiint_{\partial V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} &= \frac{Q}{\epsilon_0} \\ 4\pi r^2 E(r) &= \frac{Q}{\epsilon_0} \\ E(r) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \\ \mathbf{E}(r) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r}. \end{aligned}$$

Wir können also nicht unterscheiden ob wir eine Punktladung am Ursprung haben, oder eine Kugelschale mit Ladung Q und Radius R am Ursprung haben, solange wir uns ausserhalb der Kugel befinden.

Als zweites Beispiel nehmen wir einen unendlich langen, gerade Draht, mit der Ladungsdichte λ . Aus Symmetriegründen muss das elektrische Feld radial sein, also $\mathbf{E} =$

$E(r)\hat{r}$ gilt. Wir wählen als geschlossene Fläche einen Zylinder mit Radius r und Länge L . Dann gilt

$$\begin{aligned} \oiint_{\partial V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} &= \frac{Q}{\epsilon_0} \\ 2\pi r L E(r) &= \frac{\lambda L}{\epsilon_0} \\ E(r) &= \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r} \\ \mathbf{E}(r) &= \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r} \hat{r} \end{aligned}$$

Als drittes Beispiel nehmen wir eine unendlich ausgedehnte, gerade Platte, mit der Flächenladungsdichte σ . Aus Symmetriegründen muss das elektrische Feld senkrecht zur Platte sein, also $\mathbf{E} = E(z)\hat{z}$ gilt. Wir wählen als geschlossene Fläche einen Zylinder mit Grundfläche A und Höhe $2h$, welcher senkrecht zur Platte steht. Dann gilt

$$\begin{aligned} \oiint_{\partial V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} &= \frac{Q}{\epsilon_0} \\ 2AE(z) &= \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \\ E(z) &= \frac{1}{2\epsilon_0} \sigma \\ \mathbf{E}(z) &= \frac{1}{2\epsilon_0} \sigma \hat{z} \end{aligned}$$

Dieses letzte Beispiel führt uns zum Konzept des Plattenkondensators. Dieser besteht aus 2 parallelen Platten, welche eine Ladung $+Q$ und $-Q$ tragen, und welche durch einen Abstand d getrennt sind. Innerhalb des Kondensators verstärken sich die elektrischen Felder der beiden Platten, so dass das elektrische Feld innerhalb des Kondensators gegeben ist durch

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma \hat{z}.$$

Ausserhalb des Kondensators löschen sich die elektrischen Felder der beiden Platten gegenseitig aus, so dass das elektrische Feld ausserhalb des Kondensators null ist.

2.4 Die Energie des elektrischen Feldes

Das elektrische Feld speichert Energie, welche wir mit der Energiedichte u beschreiben. Sie ist definiert als

$$u = \frac{dE}{dV} = \frac{\epsilon_0}{2} E^2.$$

Um dies zu motivieren, betrachten wir einen Luftballon mit Ladungsdichte σ und Radius R . Wenn wir nun den Radius von R auf $R - dR$ verkleinern, so müssen wir eine Arbeit verrichten.

Das Volumen nach der Kompression ist gegeben durch

$$V_2 = \frac{4}{3}\pi(R - dR)^3 \approx \frac{4}{3}\pi R^3 - 4\pi R^2 dR.$$

Somit ist die Änderung des Volumens gegeben durch

$$dV = 4\pi R^2 dR.$$

Somit ist die Raumladungsdichte gegeben durch

$$\rho = \frac{dq}{dV} = \frac{q}{4\pi R^2 dR} \text{ für } R < r < R + dR.$$

Mit dem Satz von Gauss können wir das elektrische Feld berechnen, welches gegeben ist durch

$$E(r) = \frac{1}{12\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2 dR} (r^3 - R^3).$$

Mit der Substitution $r = R + x$ erhalten wir näherungsweise

$$E(r) = E_{\text{ausser}} \frac{r - R}{dR}.$$

Dies erzeugt somit einen elektrostatischen Druck

$$p(r) = \frac{d(qE)}{dA} = E \frac{dq}{dA} = \epsilon_0 E_{\text{ausser}}^2 \frac{r - R}{dR}.$$

Integrieren wir dies von R bis $R + dR$, so erhalten wir die Arbeit, welche von der externen Kraft verrichtet werden muss, um den Ballon zu komprimieren, gegeben durch

$$W_{\text{ext}} = \int_R^{R+dR} p(r) dr = \frac{\epsilon_0}{2} E_{\text{ausser}}^2 4\pi R^2 dR.$$

Dies ist genau die Energie, welche im elektrischen Feld gespeichert ist, also

$$W_{\text{ext}} = u dV.$$

Lec 8

2.5 Elektrisches Potential

Wenn wir eine Ladung von einem Punkt B zu einem Punkt A bewegen, so müssen wir eine Arbeit verrichten, welche gegeben ist durch

$$W_{BA} = - \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = -q \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}.$$

Dabei verschwinden die senkrechten Komponenten der Kraft, und nur die Senkrechten bleiben übrig. Das elektrische Feld ist also konservativ, analog zur Gravitationskraft, und es existiert somit ein Potential, gegeben durch

Definition 2.5: Elektrisches Potential

Das Elektrische Potential ist definiert als

$$\mathbf{E} = -\nabla V.$$

Das Potential impliziert ausserdem, dass $\nabla \times \mathbf{E} = 0$

Somit ist

$$\Phi_{BA} = - \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = V(B) - V(A).$$

Typischerweise wird der Nullpunkt des Potentials am Unendlichen gesetzt, so dass $V(\infty) = 0$ gilt.

Wenn wir eine Potentialänderung $d\varphi$ über eine Strecke $d\mathbf{s}$ haben, so gilt

$$d\varphi = -\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \Rightarrow E = \frac{d\varphi}{ds}.$$

Der Gradient zeigt immer in die Richtung des grössten Anstiegs. Folglich ist Senkrecht zum Gradienten eine Fläche, mit konstantem Potential, genannt **ÄQUIPOTENTIALFLÄCHE**.

Bei mehreren Ladungen, ist nach dem Superpositionsprinzip das Potential die Summe der Potentiale, welche von jeder Ladung verursacht werden. Also

$$\varphi_{\text{total}} = \sum_i \varphi_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}.$$

Bei einer kontinuierlichen Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{r})$ ist das Potential gegeben durch

Theorem 2.6: Potential einer Ladungsverteilung

Es gilt

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'.$$

Die Potentielle Energie an einem Ort \mathbf{r} ist gegeben durch

$$E_{\text{pot}} = q\varphi(\mathbf{r}).$$

Wenn man somit ein $\rho(\mathbf{r})$ basteln will, muss ab der zweiten Ladung Arbeit verrichtet werden.

Theorem 2.7: Energie im Elektrischen Feld

Es gilt

$$W = \frac{1}{2} \iiint_{\mathbb{R}^3} \rho(\mathbf{r})\varphi(\mathbf{r})dV.$$

Wir wissen, dass $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ gilt, somit²

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \epsilon_0 \iiint_{\mathbb{R}^3} \nabla \cdot \mathbf{E} \varphi dV \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_0 \phi(\mathbf{r})E(\mathbf{r})|_{\mathbb{R}^3} - \frac{1}{2} \epsilon_0 \iiint_{\mathbb{R}^3} \mathbf{E} \cdot \nabla \varphi dV \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_0 \iiint_{\mathbb{R}^3} E^2 dV. \end{aligned}$$

Mit der Energiedichte $u = \frac{W}{V}$ sehen wir

$$u = \frac{dW}{dV} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \mathbf{E}^2(\mathbf{r}).$$

Als einfaches Beispiel betrachten wir einen Plattenkondensator mit Plattenfläche A und Plattenabstand d . Angenommen auf einer Platte sei das Potential Φ und auf der anderen 0. Dann ist

$$\phi_{BA} = - \int_{z_a}^{z_b} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = E\Delta z.$$

Hier ist nun Möglich, dass die Arbeit negativ ist, obwohl $\Delta\phi$ positiv ist, da die Ladung negativ sein könnte. Für $\Delta z = d$ erhalten wir

$$E = \frac{\Phi}{d}.$$

Beim Potential einer Punktladung q am Ursprung gilt

$$\int_{BA} = - \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}.$$

²Die Herleitung ist nicht ganz korrekt, bei der partiellen integration müsste ein Oberflächenintegral auftauchen, welches aber verschwindet, da das Potential am Unendlichen null ist.

2.6 Mathematisches Interlude

Die folgenden Sätze aus der Vektoranalysis sind von fundamentaler Bedeutung für die Elektrodynamik.

Theorem 2.8: Satz von Gauss

Es gilt

$$\oiint_{\partial V} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a} = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{F} dV.$$

Theorem 2.9: Satz von Stokes

Es gilt

$$\oint_{\partial A} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \iint_A \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a}.$$

Wenden wir den Satz von Gauss auf das Gauss'sche Gesetz an, finden wir

$$\oiint_{\partial V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{E} dV = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho dV.$$

Da dies für jedes Volumen V gilt, muss die Integranden gleich sein, also

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

Daraus folgen auch die Laplace und Poissongleichung.

Theorem 2.10: Poissongleichung

Es gilt

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

In kartesischen Koordinaten ist die Poissongleichung gegeben durch

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

Für den Fall, dass in unserem Volumen $\rho = 0$ ist haben wir den Spezialfall der Laplacegleichung

$$\nabla^2 \varphi = 0.$$

Mit dem Satz von Stokes finden wir für die Elektrostatik

$$\oint_{\partial A} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \iint_A \nabla \times \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = 0.$$

Da dies für jede Fläche A gilt, muss die Integranden gleich null sein, also

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0.$$

Achtung. Dies gilt nur in der Elektrostatik, in der Elektrodynamik gilt dieses Gesetz nicht mehr.

3 Elektrische Leiter

Isolatoren sind Materialien, in welchen sich Ladungen nicht frei bewegen können, während in Leitern Ladungen frei beweglich sind. Aktuell betrachten wir den Prozess des Bewegens nicht.

Wenn wir einen Leiter ohne externes Elektrisches Feld haben, so bewegen sich die Ladungen an den Rand des Leiters, so dass das elektrische Feld innerhalb des Leiters null ist. Mit einem externen Elektrischen Feld, so bewegen sich die Ladungen ebenfalls an den Rand des Leiters, so dass das elektrische Feld innerhalb des Leiters null ist.

Im Volumen des Leiters liefert das Gauss'sche Gesetz, dass

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0.$$

Leiter werden durch ein externes elektrisches Feld beeinflusst und umgekehrt.

Im wesentlichen haben elektrische Leiter 4 wichtige Eigenschaften:

- Innerhalb des Leiters ist $\rho = 0$. Ladungen sind immer auf der Oberfläche.
- Das elektrische Feld innerhalb des Leiters ist null. Ausserhalb ist $\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n}$.
- Spitzeneffekt: Die Oberflächenladungsdichte hängt von der Krümmung der Oberfläche ab, so dass die Ladungsdichte an spitzen Stellen höher ist als an flachen Stellen.

Das E Feld ausserhalb ist parallel zum Normalenvektor \hat{n} , da sonst eine tangentielle Komponente des elektrischen Feldes existieren würde, welche Ladungen bewegen würde, was im Gleichgewicht nicht möglich ist.

Ausserdem ist die Oberfläche eine Äquipotentialfläche.

Der Betrag der elektrischen Feldstärke unmittelbar ausserhalb eines Leiters ist gegeben durch

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}.$$

Lec 9

Die Netto Ladung auf der Oberfläche ergibt sich durch die Arbeit / potentielle Energie der Ladungsverteilung.

$$W = \frac{1}{2} \iiint_V \rho(\mathbf{r}) \varphi(\mathbf{r}) dV.$$

Wir können uns die folgenden Fälle vorstellen:

- a) Ladung auf der Oberfläche einer Kugel mit Radius R .
 b) Homogene Ladungsverteilung auf einer Kugel mit Radius R .

In Fall a) haben wir

$$W = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{R}.$$

In Fall b) haben wir

$$W = \frac{3}{20\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{R}.$$

Da die Arbeit, welche von der Ladungsverteilung verrichtet werden muss, um die Ladung auf die Oberfläche zu

bringen, höher ist als die Arbeit, welche von der Ladungsverteilung verrichtet werden muss, um die Ladung homogen zu verteilen, ist es energetisch günstiger für die Ladung, sich auf der Oberfläche zu befinden.

Wir wollen nun die Eigenschaften von Leitern begründen. Dazu nehmen wir einen Leiter. Wenn wir einen Punkt C auf der Oberfläche und einen Punkt A im inneren des Leiters nehmen, so gilt

$$\Phi_{CA} = - \int_A^C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0.$$

Wenn nun ein Punkt D ebenfalls auf der Oberfläche liegt, so gilt

$$\Phi_{CD} = - \int_C^D \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0.$$

Dies folgt da E senkrecht zur Oberfläche ist, so dass die tangentielle Komponente des elektrischen Feldes null ist. Somit haben wir gezeigt, dass die Oberfläche eine Äquipotentialfläche ist.

Mit dem Satz von Gauss folgt direkt, dass die Ladung auf der Oberfläche liegt, da sonst im Inneren des Leiters eine Ladungsdichte ρ existieren würde, welche das elektrische Feld im Inneren des Leiters nicht null sein lassen würde.

Nehmen wir nun an, dass wir einen Hohlraum haben, welcher von unserem Leiter umschlossen ist. In diesem Hohlraum muss auch $E = 0$ gelten, insofern der Hohlraum keine Ladung enthält.

Mit diesem Prinzip funktioniert ein Van de Graaff Generator, welcher eine Ladung auf einer Metallkugel ansammelt, welche von einem isolierenden Stab getragen wird, welcher wiederum von einem leitenden Gehäuse umgeben ist. Das elektrische Feld innerhalb des Gehäuses ist null, so dass die Ladung auf der Metallkugel bleibt.

Ein allgemeines Elektrisches Feld kann durch die Poisson Gleichung gelöst werden, wenn genügend Randbedingungen gegeben sind. Dies ist aber Teil von Elektrodynamik.

Für uns sehr wichtig ist es, dass es für eine gegebene Menge an Randbedingungen wenn eine Lösung existiert, dann ist diese Lösung eindeutig.

Die Angabe der Divergenz und der Rotation eines Vektorfeldes sind ausreichend, um dieses Vektorfeld eindeutig zu bestimmen, sofern $F \rightarrow 0$ für $r \rightarrow \infty$ gilt.

Ein wichtiges Resultat ist das Earnshaw Theorem, welches besagt, dass es unmöglich ist, ein stabiles elektrostatisches Gleichgewicht zu erreichen.

Wenn wir eine Ladung in einem Hohlraum platzieren, welcher von einem Leiter umgeben ist, so wird die Ladung die Oberfläche des Hohlraums beeinflussen. Dies Ladung induziert eine negative Ladung auf der Oberfläche des Hohlraums, welche die gleiche Ladung wie die ursprüngliche Ladung hat aber mit entgegengesetztem Vorzeichen, und eine positive Ladung auf der Oberfläche des Leiters, welche die gleiche Ladung wie die ursprüngliche Ladung hat.

Nach dem Gauss'schen Gesetz, muss die Ladung auf der Oberfläche des Hohlraums die gleiche Ladung wie die ursprüngliche Ladung haben, damit das elektrische Feld innerhalb des Leiters null ist.

Folglich fühlen wir ausserhalb des Leiters die gleiche Ladung wie die ursprüngliche Ladung, jedoch können wir die Position der ursprünglichen Ladung nicht mehr bestimmen.

Wenn wir nun die Aussenseite der Schale erden, so erhalten wir einen Faradayschen Käfig, welcher das elektrische Feld von aussen abschirmt, so dass im Inneren nur das Feld der Ladung im Inneren des Käfigs existiert.

3.1 Kondensatoren

Ein Kondensator ist ein System welches Ladung speichern kann.

Wir erinnern uns an das Potential

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$

Definition 3.1: Kapazität

Die Kapazität C eines Kondensators ist definiert als die Ladung Q , welche auf dem Kondensator gespeichert werden kann, geteilt durch die Potentialdifferenz Φ zwischen den Platten des Kondensators. Also

$$C = \frac{Q}{\Phi}.$$

Wichtig ist, dass die Kapazität eines Kondensators nur von der Geometrie des Kondensators abhängt, und nicht von der Ladung oder dem Potential.

Das einfachste Beispiel ist ein Plattenkondensator. Dieser besteht aus 2 parallelen Platten, welche eine Ladung $+Q$ und $-Q$ tragen, hierbei nehmen wir an, dass die Plattenfläche A und der Plattenabstand d gegeben ist mit $A \gg d^2$. Das elektrische Feld innerhalb des Kondensators ist gegeben durch

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma \hat{z} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{Q}{A} \hat{z}.$$

Mit $V = Ed$ erhalten wir

$$C = \frac{Q}{\Phi} = \frac{Q}{Ed} = \epsilon_0 \frac{A}{d}.$$

Wir möchten nun die Energie eines Kondensators berechnen. Die Energie eines Kondensators ist gegeben durch

$$dW = \Phi dQ = \frac{Q}{C} dQ.$$

Integration ergibt

$$W = \int_0^Q \frac{Q'}{C} dQ' = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} CV^2.$$

Wenn wir Kondensatoren Parallel schalten, so addieren sich die Kapazitäten, da die Potentialdifferenz über beide Kondensatoren gleich ist. Also

$$C_{\text{parallel}} = C_1 + C_2.$$

Wenn wir Kondensatoren in Serie schalten, so addieren sich die Kehrwerte der Kapazitäten, da die Ladung auf beiden Kondensatoren gleich ist. Also

$$\frac{1}{C_{\text{serie}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}.$$

4 Elektrische Ströme

Ein **ELEKTRISCHER STROM** ist eine (Netto-) Ladung welche in Bewegung ist.

Zum Beispiel hat Kupfer eine Ladungsträgerdichte von $n = 8.4 \cdot 10^{23} \text{ \#}/\text{cm}^3$. Wenn wir ein Querschnitt eines Leiters mit A haben, somit ist die Menge an Ladungsträgern in einer Länge

$$\Delta N = nA\Delta x = nA\bar{v}\Delta t.$$

Wir definieren den Strom wie folgt

Definition 4.1: Strom

Der Strom I ist definiert als die Ladung q welche pro Zeiteinheit durch einen Querschnitt eines Leiters fliesst. Also

$$I = \frac{dQ}{dt} = \bar{v}Ane.$$

Hierbei ist $|q| = e$.

Die Stromstärke wird gemessen in Ampere A, wobei $1A = 1C/s$ gilt.

Die konventionelle Stromrichtung ist die Richtung, in welcher positive Ladungen fließen. Die physikalische Stromrichtung ist die Richtung, in welcher negative Ladungen fließen, also genau in die andere.

Doch wieso bewegen sich die Elektronen überhaupt? Hierzu benötigen wir eine Spannungsquelle, welche eine Potentialdifferenz erzeugt, welche auch die Spannung V genannt wird. Diese stellt ein unendliches Reservoir an Ladungen dar.

Wir unterscheiden zwei Arten von Leitern; den **REALEN LEITER**, in welchem wir Ladungen haben, welche gegen einen Atomrumpf knallen. Wenn wir dies ausrechnen, finden wir dass sich die Ladungen mit ca $6m/d$ bewegen, was sehr langsam ist. Das elektrische Feld $E = \frac{V}{d}$ beschleunigt die Ladungen, jedoch kollidieren die Ladungen mit den Atomrümpfen, so dass sie immer wieder abgebremst werden.

Im **IDEALEN LEITER** nehmen wir an, dass die Ladungsträger keine Kollisionen haben. Wir nehmen an, dass $v = \text{const}$ ist und somit kein elektrisches Feld notwendig ist. Dies hat unmittelbar zur Folge, dass das Potential auf einem Leiter konstant ist.

Wir haben definiert $\frac{I}{A} = \bar{v}nq$. v kann jedoch auch ein Vektor sein. Wir definieren nun die Stromdichte \mathbf{J} als

$$\mathbf{J} = nq\bar{v}.$$

Der Zusammenhang zum Strom I ist gegeben durch

$$I_A = \iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a}.$$

4.1 Ladungserhaltung

Wenn wir ein Volumen \mathcal{V} betrachten, so gilt

$$I_{\partial V} = \oiint_{\partial V} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a}.$$

Mit dem Satz von Gauss erhalten wir

$$I_{\partial V} = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{J} dV.$$

Weiter muss der Strom von einer Ladungsänderung kommen, somit gilt

$$I_{\partial V} = -\frac{dQ}{dt} = -\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho dV.$$

Gleichsetzen ergibt

$$\begin{aligned} \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{J} dV &= -\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho dV \\ \nabla \cdot \mathbf{J} &= -\frac{\partial \rho}{\partial t}. \end{aligned}$$

Dies gilt, da die Gleichung für jedes Volumen V gilt, so dass die Integranden gleich sein müssen.

Theorem 4.2: Kontinuitätsgleichung

Es gilt

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

"Von nix kommt nix"

Davon können wir den stationären Strom definieren, welcher dadurch charakterisiert ist, dass die Ladungsdichte ρ nicht von der Zeit abhängt. Also

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0.$$

Wenn wir einen realen Leiter haben, so bemerken wir, dass $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \neq 0$ gilt, da sonst kein Strom fließen könnte. Wir können aber schreiben

$$E_{\text{tot}} = E_{\text{kons}} + E_{\text{nicht-kons}}.$$

Für das konservierte elektrische Feld gilt $\oint E_{\text{kons}} \cdot d\mathbf{s} = 0$. Das nicht konservierte Feld wird von unserer Spannungsquelle erzeugt.

Das mikroskopische Ohmsche Gesetz besagt, dass die Stromdichte \mathbf{J} proportional zum elektrischen Feld \mathbf{E} ist.

Theorem 4.3: Mikroskopisches Ohmsches Gesetz

Es gilt

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}.$$

Hierbei ist σ die Leitfähigkeit des Materials.

Ein idealer Leiter, hat $\sigma = \infty$. Der spezifische Widerstand ρ ist definiert als $\rho = \frac{1}{\sigma}$, so dass ein idealer Leiter $\rho = 0$ hat.

Nehmen wir uns einen zylindrischen realen Leiter. Wir haben 3 Gleichungen

1) $J = \sigma E$

2) $\rho = \frac{1}{\sigma}$

3) $E = \frac{V}{l}$

Zusammen finden wir

$$I = \mathbf{J} \cdot \mathbf{A} = \sigma EA = \frac{V}{\rho l} \cdot A.$$

Oder

$$V = \frac{\rho l}{A} I = RI.$$

Wobei R der Widerstand des Leiters ist, welcher gegeben ist durch $R = \frac{\rho l}{A}$ im Spezialfall eines zylindrischen Leiters.

4.2 Schaltkreise

Ein Schaltkreis besteht aus einer Spannungsquelle und mehreren Bauteilen. Es gibt zwei Regeln. Ladungserhaltung $\sum I_i = 0$ und Energieerhaltung $\sum V_i = 0$.

An Jedem Knotenpunkt eines Schaltkreises muss die Summe der Ströme null sein. Wir definieren die Ströme positiv, wenn sie in den Knotenpunkt hinein fließen, und negativ, wenn sie aus dem Knotenpunkt heraus fließen.

Die Energieerhaltung besagt, dass die Summe der Potentialdifferenzen entlang eines geschlossenen Pfades null sein muss. Hierbei ist bei einem Widerstand, wenn wir ihn entlang der Stromrichtung durchlaufen, die Potentialdifferenz negativ, da die Ladung Energie verliert, und bei einer Spannungsquelle, wenn wir sie entlang der Stromrichtung durchlaufen, die Potentialdifferenz positiv, da die Ladung Energie gewinnt. Analog bei einem Kondensator.

Wenn wir mehrere Widerstände in Serie schalten, so addieren sich die Widerstände, da die Ströme durch alle Widerstände gleich sind. Also

$$R_{\text{serie}} = R_1 + R_2.$$

Wenn wir zwei Ströme parallel schalten, so addieren sich die Kehrwerte der Widerstände, da die Potentialdifferenz über beide Widerstände gleich ist. Also

$$\frac{1}{R_{\text{parallel}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

Eine Reale Spannungsquelle hat einen Innenwiderstand r . Wir nennen die Spannung bei offenem Stromkreis **ELEKTROMOTORISCHE KRAFT** ϵ . Somit ist

$$V = \epsilon - Ir.$$

Wobei ϵ gegeben ist mit

$$\epsilon = \oint_{\partial A} \mathbf{E}_{\text{tot}} \cdot d\mathbf{s}.$$

Lec 11

4.3 Energieumwandlung

Wenn wir eine Ladung durch eine Potentialdifferenz bewegen, so wird Arbeit $W = QV$ verrichtet. Die Leistung P ist definiert als die Arbeit pro Zeiteinheit, also

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{dQ}{dt} V = IV.$$

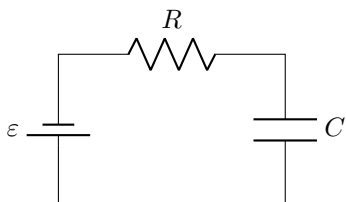
Mit dem ohmschen Gesetz $V = IR$ erhalten wir

$$P = I^2 R = \frac{V^2}{R} = VI.$$

Die **JOULE'SCHE WÄRME** ist die Wärme, welche durch den Strom in einem Widerstand erzeugt wird, und ist gegeben durch $P = I^2 R$.

Wenn wir nun zwei Glühbirnen für 60 W und 100 W haben für einen Haushalt und diese entgegen der Intuition in Serie schalten, so stellen wir fest, dass die 60 W Glühbirne heller leuchtet als die 100 W Glühbirne. Dies liegt daran, dass die 60 W Glühbirne einen höheren Widerstand hat als die 100 W Glühbirne, so dass mehr Leistung in der 60 W Glühbirne umgesetzt wird.

Wir wollen uns nun noch kompliziertere Schaltkreise anschauen. Betrachten wir dazu folgenden Schaltkreis um einen Kondensator aufzuladen.



Mit Kirchhoff erhalten wir

$$\varepsilon - IR - \frac{Q}{C} = 0.$$

Wir können dies umschreiben zu

$$R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = \varepsilon$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{V_0}{R} - \frac{1}{RC} Q.$$

Wir definieren nun $\tau = RC$ und $I_0 = \frac{V_0}{R}$. Einsetzen gibt

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{I_0 \tau - Q}{\tau}.$$

Weiter sei $Q_0 = CV_0$. Separieren der Variablen gibt

$$\int_{Q(t_0)=0}^Q \frac{1}{I_0 \tau - Q'} dQ' = \int_0^t \frac{1}{\tau} dt'.$$

Integration ergibt

$$\ln \left(\frac{I_0 \tau - Q}{I_0 \tau} \right) = -\frac{t}{\tau}$$

$$\frac{I_0 \tau - Q}{I_0 \tau} = e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$Q(t) = I_0 \tau (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = Q_0 (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}).$$

Den Strom finden wir durch differenzieren von $Q(t)$, also

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Der Strom ist also zu Beginn stark und nimmt dann exponentiell ab, während die Ladung zu Beginn null ist und dann ansteigt, bis sie den Wert Q_0 erreicht.

Die Spannung über dem Kondensator ist gegeben durch

$$V_C(t) = \frac{Q(t)}{C}.$$

5 Spezielle Relativitätstheorie

Wir möchten kurz die Eigenschaften über Raum und Zeit besprechen, welche wir bislang angenommen haben. Bislang nahmen wir an, dass Zeit und Raum homogen und isotrop sind, also dass Raum und Zeit absolut sind. Weiter sind Inertialsysteme Systeme, in welchen die newtonschen Gesetze gelten. Letztens haben wir das Gallilei'sche Relativitätsprinzip. Wenn wir ein Inertialsystem haben, so ist jedes andere System, welches sich mit konstanter Geschwindigkeit relativ zu diesem System bewegt, ebenfalls ein Inertialsystem. Damit können wir sagen, dass alle Inertialsysteme gleichwertig sind, so dass es kein bevorzugtes Inertialsystem gibt. Man kann dies ausdrücken durch: Die Naturgesetze müssen Forminvariant sein.

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}' \Leftrightarrow \mathbf{F}' = m\mathbf{a}'.$$

Lec 12

Der Erste wichtige Punkt ist die Gallilei Transformation, welche lautet

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}'(t) + \mathbf{v}t.$$

Wir wollen das Konzept der Weltlinie und des Ereignisses einführen. Ein Ereignis ist ein 4-Tupel

$$x_e = \bar{x} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}.$$

Hierbei ist c die Lichtgeschwindigkeit. Die Variante mit dem Strich oben \bar{x} ist ein **KONTRAVARIANTER VEKTOR**. Er hat eine räumliche und zeitliche Komponente. Wir schreiben einen Vektor auch gerne als

$$\bar{x} = \sum_{\mu=0}^3 x^\mu e_\mu.$$

Eine andere Version ist der **KOVARIANTE VEKTOR** \underline{x} , welcher gegeben ist durch

$$\underline{x} = (ct \ x \ y \ z) = (x_0 \ x_1 \ x_2 \ x_3).$$

In Summen Schreibweise ist das

$$\underline{x} = \sum_{\mu=0}^3 x_\mu e^\mu.$$

Ein Kovarianter Vektor ist wie ein normaler Vektor, der kovariante Vektor ist wie eine Ableitung. Wir definieren da Skalarprodukt in der newtonschen Mechanik als

$$\underline{x} \cdot \bar{x} = c^2 t^2 + \mathbf{x}^2.$$

Der kovariante Vektor ist der Dualvektor zum kontravarianten Vektor, so dass

$$\underline{x} \cdot \bar{x} = \sum_{\mu=0}^3 x_\mu x^\mu.$$

Wir wollen ein wenig mit der Gallilei Transformation spielen. Wir definieren

$$\beta = v/c.$$

Im Jargon wird dies **BOOST** bezeichnet. Es gilt

$$\mathbf{v}t + \mathbf{r}'(t) = \mathbf{r}(t).$$

Gleichzeitig erhalten wir die Gallilei Addition von Geschwindigkeiten. Durch einmal Ableiten erhalten wir

$$\frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} - \mathbf{v}.$$

Bei der zweiten Ableitung erhalten wir

$$\frac{d^2\mathbf{r}'}{dt^2} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}.$$

Somit ist $F = ma \Leftrightarrow F = ma'$. Dies nennt man die Forminvarianz des zweiten newtonschen Gesetzes unter der Gallilei Transformation.

Eine triviale Eigenschaft ist $\Delta t = \Delta t'$ und

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2' - \mathbf{r}_1' = \Delta \mathbf{r}'.$$

Stellen wir vor wir fahren mit Geschwindigkeit v in einem Auto, und sehen Palmen ausserhalb. Dann sehen wir die Palmen mit Geschwindigkeit v auf uns zukommen, so dass die Geschwindigkeit der Palmen $-v$ ist. Dies folgt direkt aus der Gallilei Transformation.

Als zweites Beispiel schwimmt eine Person durch einen Fluss mit Geschwindigkeit v' der Fluss bewegt sich mit Geschwindigkeit v senkrecht zur Schwimmrichtung. Somit ist

$$\dot{r} = \dot{r}' + \mathbf{v}.$$

Das ganze können wir ganz elegant in Vektorform schreiben, durch eine Matrizenmultiplikation

$$x'^{\mu} = \mathbb{M}_G^{\mu\nu} x_{\nu} \text{ mit } \mathbb{M}_G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\beta^1 & 1 & 0 & 0 \\ -\beta^2 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta^3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wenn wir ein ruhendes Objekt haben, so ist die Weltlinie dieses Objekts gegeben durch eine parallele zur Zeitachse. Wenn wir nun die Gallilei Transformation anwenden, so erhalten wir eine Weltlinie, welche sich gegenüber der Zeitachse neigt, so dass das Objekt sich mit konstanter Geschwindigkeit bewegt. Die Steigung ist gegeben durch

$$\frac{dct'}{dx} = \frac{1}{\beta}.$$

Betrachten wir mal ein wenig Elektrodynamik. Die Frage ist, was ist das Medium in welchem sich Licht (also eine EM Welle) ausbreitet? Es wurde das Konzept des **ÄTHERS** eingeführt, welches ein Medium ist, in welchem sich Licht ausbreitet. Hierbei haben wir ein ausgezeichnetes Inertialsystem, folglich geht die Gallilei Relativitätstheorie nicht mehr auf. Die Existenz des Äthers wurde durch das Michelson-Morley Experiment widerlegt, welches zeigte, dass die Lichtgeschwindigkeit in alle Richtungen gleich ist.

Dies brachte Einstein zum genialen Postulat: Die Lichtgeschwindigkeit hat im Vakuum den selben Wert relativ zum Inertialsystem.

5.1 Raum und Zeit

Wir beginnen damit Zeiten zu messen. Stellen wir uns eine Lichtuhr in einem bewegten Inertialsystem K' vor. Ein Lichtpuls wird von einem Spiegel ausgesendet und dann reflektiert, bevor er wieder am Spiegel ankommt. Die Zeit, welche der Lichtpuls benötigt, um zum Spiegel zu gelangen, ist gegeben durch

$$\Delta t' = \frac{2L}{c}.$$

In K bewegt sich die Lichtuhr mit Geschwindigkeit v . Somit ist die Zeit, welche der Lichtpuls benötigt, um zum Spiegel zu gelangen, gegeben durch

$$\Delta t = \frac{2\sqrt{L^2 + (v\Delta t/2)^2}}{c}.$$

Somit ist auch

$$(c^2 - v^2)\Delta t^2 = \frac{l^2}{c^2} = \Delta t'^2.$$

Somit folgt, dass

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma \Delta t'.$$

Dies ist die sogenannte **ZEITDILATATION**. Es gilt $\gamma \geq 1$, so dass die Zeit in K immer grösser ist als die Zeit in K' .

Somit sind Zeitintervalle am kürzesten in dem Inertialsystem, in welchem die Ereignisse am selben Ort stattfinden. Mann nennt dies auch **EIGENZEIT** τ .

Lec 13

Eine Messung beginnt immer mit einem Startereignis $\bar{x}_s = \begin{pmatrix} ct \\ \mathbf{x}_s \end{pmatrix}$ und endet mit einem Endereignis $\bar{x}_e = \begin{pmatrix} ct \\ \mathbf{x}_e \end{pmatrix}$.

Wenn wir die Zeit messen wollen geht dies am Besten in einem Inertialsystem am selben Ort, wenn wir eine Länge messen wollen, so geht dies am Besten in einem Inertialsystem zur selben Zeit. Als Trick: $\Delta x = c\Delta t$.

Wenn wir zwei Koordinatensysteme K und K' haben, wollen wir im allgemeinen dass bei $t = t' = 0$ die Koordinatensysteme übereinander liegen, so dass die Koordinaten der Ereignisse in beiden Koordinatensystemen gleich sind.

Wenn wir in einem ruhenden System eine Länge l' messen, so lässt sich diese Länge in einem bewegten System K , welches sich mit Geschwindigkeit v relativ zu K' bewegt. Wir betrachten bei einer Lichtuhr die Ereignisse

Tabelle 2: Ereignisse

Ereignis	K	K'
Emission	t_0	t'_0
Reflexion	t_1	t'_1
Ankunft	t_2	t'_2

In K' ist $l' = c(t'_1 - t'_0)$. Zurück gilt $l' = c(t'_2 - t'_1)$. Somit ist $\Delta t' = t'_2 - t'_0 = 2l'/c$.

In K ist $c\Delta t_1 = l + v\Delta t_1$ Also

$$\frac{l}{c - v} = \Delta t_1.$$

Auf dem Rückweg ist $c\Delta t_2 = l - v\Delta t_2$, also

$$\frac{l}{c+v} = \Delta t_2.$$

Zusammengenommen ist $c\Delta t = cl\left(\frac{1}{c-v} + \frac{1}{c+v}\right) = 2l\frac{1}{1-\beta^2}$, so dass

$$c\Delta t = 2l\gamma^2.$$

Wir wissen jedoch bereits, dass $\Delta t = \gamma\Delta t'$. Fügen wir unsere Gleichungen zusammen, so erhalten wir

$$\begin{aligned} c\gamma\Delta t' &= 2l\gamma^2 \\ c\gamma\frac{2l'}{c} &= 2l\gamma^2 \\ l' &= l \cdot \gamma \\ l &= \frac{l'}{\gamma}. \end{aligned}$$

Dieser Effekt wird als **LÄNGENKONTRAKTION** bezeichnet.

5.2 Lorentz Transformation

In der speziellen Relativitätstheorie müssen Boosts zwischen Inertialsystemen die Naturgesetze invariant lassen. Für einen Lichtblitz in K gilt also $x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2$. In K' muss ebenfalls $x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2t'^2$ gelten. Mit der Gallilei Transformation erhalten wir

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2t'^2 - (2\beta z'ct't + \beta^2c^2t'^2).$$

Somit ist die Gallilei Transformation nicht mehr gültig, da sie die Form der Lichtkugel nicht invariant lässt. Wichtig ist ausserdem dass für $v \ll c$ die Gallilei Transformation eine gute Näherung ist.

Diese Transformation, wird durch die **LORENTZ TRANSFORMATION** ersetzt, welche gegeben ist bei einem Boost in z -Richtung durch

$$\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= y \\ z' &= A(x - vt) \\ t' &= Bz + Dt. \end{aligned}$$

Einsetzen in die Gleichung der Lichtkugel ergibt

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \Lambda \bar{x}.$$

Wobei

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}.$$

Bemerkung: $\Lambda^{-1}(v) = \Lambda(-v)$, so dass die Lorentz Transformation eine Inverse hat, welche auch eine Lorentz Transformation ist.

Wir definieren ein spezielles Skalarprodukt, welches Lorentz Invariant ist, durch

$$K_\mu \cdot x^\mu = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2.$$

Angenommen wir haben ein Bezugssystem K mit kovarianter Basis $\underline{e} = (e_0, e_1, e_2, e_3)$, Weiter haben wir ein Bezugssystem K' mit kovarianter Basis $\underline{e}' = (e'_0, e'_1, e'_2, e'_3)$. Es gilt

$$\underline{e}' = \underline{e}R.$$

Wir wollen haben für eine Rotation um 90 Grad:

$$(e'_1, e'_2) = (e_1, e_2) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bei einer Kontravarianten wäre

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Somit ist $\bar{x}' = R^{-1}\bar{x}$. Konventionsbehaftet, ist

$$R^{-1} = \Lambda.$$

In der speziellen Relativitätstheorie lässt sich ein kovarianter Vektor durch einen kontravarianten Vektor durch die Metrik $g_{\mu\nu}$ ausdrücken, also

$$\underline{x} = \bar{x}^T g.$$

Wobei g der Metrische Tensor ist, welcher gegeben ist durch

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Mit der Einsteinschen Summenkonvention können wir schreiben

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu.$$

Und für die kovarianten Vektoren

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu.$$

Wir möchten uns nun Abstände in einem abstrakten Sinn anschauen. Angenommen wir haben zwei Ereignisse x und y .

$$\begin{aligned} \bar{x} &= (ct_1, x, y, z) \\ \bar{y} &= (ct_2, x', y', z'). \end{aligned}$$

Dann ist $ct'_1 = \gamma(ct - \beta z)$, $ct'_2 = \gamma(ct' - \beta z')$. Somit können wir bei einem Übergang zu differenzialen die Geschwindigkeit im ungestrichenen System $v = \frac{dz}{dt}$ definieren, so dass

$$u' = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}}.$$

Hierbei ist v die Boost Geschwindigkeit, u die Geschwindigkeit im ungestrichenen System und u' die Geschwindigkeit im gestrichenen System. Für die Rücktransformation erhalten wir

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}}.$$

Wenn wir nun einen Lichtblitz betrachten, so ist $u = c$, so dass

$$u' = \frac{c - v}{1 - \frac{vc}{c^2}} = \pm c.$$

Eine weitere Eigenschaft der speziellen Relativitätstheorie ist das die Gleichzeitigkeit von Ereignissen relativ ist. Angenommen wir haben zwei Ereignisse \bar{x}_1 und \bar{x}_2 , welche im

System K gleichzeitig stattfinden, so dass $t_1 = t_2$. Somit sind die Ereignisse bei Koordinaten

$$\bar{x}_1 = \begin{pmatrix} ct \\ +\ell \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \bar{x}_2 = \begin{pmatrix} ct \\ -\ell \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wenn wir nun in ein System K' wechseln, welches sich mit Geschwindigkeit v relativ zu K bewegt, so erhalten wir

$$\begin{aligned} ct'_1 &= \gamma(ct - \beta\ell) \\ ct'_2 &= \gamma(ct + \beta\ell). \end{aligned}$$

Somit ist das Zeitintervall zwischen den Ereignissen in K' gegeben durch

$$c\Delta t' = ct'_2 - ct'_1 = 2\gamma\beta\ell.$$

Somit ist

$$\Delta t' = \frac{2\gamma\beta\ell}{c} \neq 0.$$

Wir suchen nun invariante Grössen, welche in allen Inertialsystemen gleich sind. Unter der Gallilei Transformation wäre dies zum Beispiel $\Delta \mathbf{r}$. Somit wäre es auch Δr^2 . Es gibt eine Metrik, $\|\mathbf{r}\|$ welche die Länge eines Vektors misst. In der newtonschen Mechanik ist dies die euklidische Metrik, welche gegeben ist durch

$$\|\mathbf{r}\|^2 = \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = x^2 + y^2 + z^2.$$

Wir definieren den **4-ER ABSTAND** oder 4-er Metrik im 4 dimensionalen Raum, auch **MINKOWSKI RAUM** genannt, durch

$$\Delta s^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta \mathbf{r})^2.$$

Er ist invariant unter der Lorentz Transformation.

Proof. Wir nehmen uns einen kontravarianten Vektor $\bar{x} = \begin{pmatrix} ct \\ \text{vecr} \end{pmatrix}$. Unter der Lorentz Transformation gilt $\bar{x}' = \Lambda \bar{x}$. Somit ist

$$\begin{aligned} c\Delta t' &= \gamma(c\Delta t - \beta\Delta z) \\ \Delta z' &= \gamma(\Delta z - \beta c\Delta t) \end{aligned}$$

Somit ist

$$\begin{aligned} \Delta s'^2 &= (c\Delta t')^2 - (\Delta z')^2 \\ &= \gamma^2(c\Delta t - \beta\Delta z)^2 - \gamma^2(\Delta z - \beta c\Delta t)^2 \\ &= \gamma^2(1 - \beta^2)(c\Delta t)^2 - \gamma^2(1 - \beta^2)(\Delta z)^2 \\ &= (c\Delta t)^2 - (\Delta z)^2 \\ &= \Delta s^2. \end{aligned}$$

Für einen Vierervektor x definieren wir

$$\|x\|^2 = \underline{x} \cdot \bar{x} = x_\mu x^\mu = c^2 t^2 - \mathbf{r}^2.$$

5.3 Minkowski Diagramme

Um den Minkowski Raum besser zu verstehen, können wir Minkowski Diagramme verwenden. Wir stellen auf der horizontalen Achse den Raum dar, und auf der vertikalen Achse die Zeit. Der Boost findet dann entlang der Raumachse statt. Ein Ereignis ist dann ein Punkt in diesem Diagramm.

Angenommen wir haben zwei Koordinatensysteme K und K' , welche sich mit Geschwindigkeit v relativ zueinander bewegen. Dann ist die Zeitachse von K' gegeben durch die Gerade $x = vt$, und die Raumachse von K' gegeben durch die Gerade $ct = vx$.

Wir wollen nun zeigen dass ein Ereignis, welches in K bei Koordinaten (ct, x) liegt, in K' bei Koordinaten (ct', x') liegt, welche durch die Lorentz Transformation gegeben sind. Es gilt

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - \beta ct) \\ ct' &= \gamma(ct - \beta x) &= \gamma(x' + \beta ct') \\ ct &= \gamma(ct' + \beta x'). \end{aligned}$$

Der Neigungswinkel des gestrichenen Koordinatensystems ist gegeben durch $\tan \theta = \beta$. Somit ist die Steigung der Zeitachse von K' gegeben durch $\tan \theta$, und die Steigung der Raumachse von K' gegeben durch $\cot \theta$.

Weiter sollte die Einheit der x' Achse erfüllen, dass $(ct', x') = (0, 1)$ ist. Somit ist $x = \gamma$ und $ct = \beta\gamma$. Analog ist die Einheit der ct' Achse gegeben durch $x = \beta\gamma$ und $ct = \gamma$.

Somit ist die Einheitslänge gegeben durch $\sqrt{\gamma^2 - \beta^2\gamma^2} = 1$.

Aufgrund der Minkowski Metrik, folgt ausserdem, dass wir keine Einheitskreise haben, sondern sogenannte Einheitshyperbeln, welche gegeben sind durch $c^2 t^2 - x^2 = 1$. Alle Punkte auf dieser Hyperbel haben die selbe Minkowski Metrik, so dass sie alle die selbe Länge haben.

Das Minkowski Diagramm veranschaulicht als Raumzeitintervalle. Wichtig, der Visuelle Eindruck, von gleichem Abstand, ist nicht immer korrekt, da die Metrik nicht euklidisch ist.

Wir definieren drei Arten von Abständen. Der Lichtkegel im Falle von $\Delta s^2 = 0$, der Zeitartige Abstand im Falle von $\Delta s^2 > 0$ und der Raumartige Abstand im Falle von $\Delta s^2 < 0$.

Wenn wir einen Zeitartigen Abstand haben, so können wir in ein Inertialsystem boosten, in welchem die Ereignisse am selben Ort stattfinden. Wir können also die Eigenzeit τ messen. Ausserdem ist die Reihenfolge der Ereignisse in allen Inertialsystemen gleich, so dass es eine Kausalität gibt.

Wenn wir einen Raumartigen Abstand haben, so können wir in ein Inertialsystem boosten, in welchem die Ereignisse zur selben Zeit stattfinden. Wir können also die Eigenlänge l messen. Bei Raumartigen Abständen ist die Reihenfolge der Ereignisse nicht in allen Inertialsystemen gleich, so dass es keine Kausalität gibt.

Lec 15

5.4 Masse, Energie und Impuls

Sinnvolle Parameter zur Parametrisierung der Weltlinie eines Teilchens ist die Eigenzeit τ . Damit können wir dann die Eigenzeit Ableitung definieren, welche auch als Vierergeschwindigkeit bezeichnet wird, durch

$$\bar{u} = \frac{d\bar{x}}{d\tau} = \begin{pmatrix} d(ct)/d\tau \\ d\mathbf{r}/d\tau \end{pmatrix}.$$

Wir wollen nun Energie und Impuls raten. Nehmen wir ein Ereignis \bar{x} mit Vierervektor x^μ . Dieses hatte die Eigenschaft, dass $\bar{x}\bar{x} = x_\mu x^\mu$ ein Lorentz invarianter Skalar ist. Wir wollen nun raten.

Die Zeitdilatation besagt, dass $\Delta t = \gamma \Delta \tau$. Somit ist dann auch $dt = \gamma d\tau$. Somit gibt es zwei Kandidaten für die Vierergeschwindigkeit.

$$\eta^\mu = \frac{dx^\mu}{dt} \text{ oder } u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}.$$

Wir werden sehen, dass die zweite Variante die richtige ist. Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{dx^0}{d\tau} &= \frac{dct}{d\tau} = \gamma c \\ \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} &= \frac{d\mathbf{x}}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \gamma \mathbf{v}. \end{aligned}$$

Ausserdem ist

$$u_\mu u^\mu = c^2 \gamma^2 - \gamma^2 v^2 = c^2.$$

Somit erfüllt die von uns geratene Vierergeschwindigkeit die Lorentz Invarianz. Ausserdem ist für $v \ll c$ die Vierergeschwindigkeit ungefähr $\bar{u} \approx (c, \mathbf{v})$ was dem klassischen Fall entspricht.

Multiplizieren wir die Vierergeschwindigkeit mit der Masse m , so erhalten wir den Viererimpuls

$$\bar{p} := m\bar{u} = \begin{pmatrix} \gamma mc =: p^0 \\ \gamma mc\beta =: \mathbf{p} \end{pmatrix}.$$

Für uns ist die Masse ein Lorentzskalar. Betrachten wir nun

$$cp^0 = m\gamma c^2 =: E.$$

Somit ist

$$\bar{p} = \begin{pmatrix} E/c \\ \mathbf{p} \end{pmatrix}.$$

Das Skalarprodukt des Viererimpulses ist gegeben durch

$$p_\mu p^\mu = \frac{E^2}{c^2} - \mathbf{p}^2 = m^2 c^2.$$

Theorem 5.1: Relativistische Energie-Impuls-Beziehung

Es gilt

$$E^2 = m^2 c^4 + p^2 c^2.$$

Der Impuls geht direkt in den klassischen Impuls über, da $\mathbf{p} = \gamma mc\beta \approx m\mathbf{v}$ für $v \ll c$.

Wenn wir nun cp^0 für $v \ll c$ betrachten, so erhalten wir

$$E = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \mathcal{O}(v^4).$$

Der erste Term mc^2 ist die sogenannte **RUHEMASSE**, der zweite Term ist die klassische kinetische Energie, und der dritte Term ist eine Korrektur zur kinetischen Energie, welche bei hohen Geschwindigkeiten relevant wird.

Der Gesamt-Viererimpuls $\bar{P} = \sum \bar{p}$ ist in einem abgeschlossenen System erhalten, wie dies beim Dreierimpuls der Fall war.

5.5 Dopplereffekt

Nehmen wir eine Quelle in einem bewegten Bezugssystem K' , welche eine Frequenz f' aussendet. Dann ist zunächst $E^2 = m^2 c^4 + p^2 c^2$. Für ein Photon ist $m = 0$, so dass $E = pc$. Der Viererimpuls ist somit, wenn sich das System in z -Richtung bewegt, gegeben durch

$$\bar{p}' = \begin{pmatrix} E'/c \\ p' \sin \theta' \\ 0 \\ p' \cos \theta' \end{pmatrix}.$$

Wenn wir nun in das System K wechseln, so erhalten wir mit der Lorentz Transformation und $p = h \frac{f}{c}$, sodass

$$\frac{f}{f'} = \frac{E}{E'} = \gamma(1 + \beta \cos \theta').$$

Wenn wir θ noch transformieren, so erhalten wir

$$\frac{f}{f'} = \frac{1}{\gamma(1 - \beta \cos \theta)}.$$

Der **LONGITUDINALE DOPPLEREFFEKT** ist gegeben durch $\theta = 0$ oder $\theta = \pi$, so dass

$$\begin{aligned} \left. \frac{f}{f'} \right|_{\theta=0} &= \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \\ \left. \frac{f}{f'} \right|_{\theta=\pi} &= \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}. \end{aligned}$$

Unter beliebigen Winkeln sprechen wir vom **TRANSVERSALEN DOPPLEREFFEKT**, welcher insbesondere für $\theta = \pi/2$,

$$\left. \frac{f}{f'} \right|_{\theta=\pi/2} = \frac{1}{\gamma}$$

ergibt.

6 Felder bewegter Ladungen

Wir nehmen vorerst die folgenden beiden empirischen Gesetze an,

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

$$\oint_{\partial A} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I.$$

Hierbei ist \mathbf{B} das sogenannte **MAGNETFELD**. μ_0 ist die **PERMEABILITÄT DES VAKUUMS**, wobei $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ gilt. Ausserdem gilt noch

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0.$$

Dementsprechend existieren keine magnetischen Monopole. Das Magnetfeld wird in Tesla T gemessen, so dass $1\text{T} = 1\text{V s/m}^2$.

Die Richtung des Magnetfeldes wird durch eine kleine Kompassnadel bestimmt, was das äquivalent zur Testladung ist.

Im allgemeinen hat Magnetismus etwas mit Strömen, also bewegter Ladung zu tun. In der Elektrostatik haben wir gelernt, dass

$$\mathbf{F}_E = \mathbf{F}_E(\mathbf{r}, q).$$

In der Magnetostatik hingegen ist

$$\mathbf{F}_B = \mathbf{F}_B(\mathbf{r}, I).$$

Um Homogene Felder zu erzeugen, können Hufeisenmagnete oder Spulen verwendet werden.

Eine wichtige Eigenschaft von Magnetfeldern ist, dass

$$W_B = \int \mathbf{F}_B \cdot d\mathbf{r} = \int q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v} dt = 0.$$

Eine wichtige Eigenschaft der Ladung ist, dass

$$\int_{\partial V(t)} \mathbf{E}(t) \cdot d\mathbf{a} = \int_{\partial V'(t')} \mathbf{E}'(t') \cdot d\mathbf{a}'.$$

Ladung ist somit Lorentzinvariant. Wenn wir elektrische Felder transformieren, so müssen wir parallel und senkrecht zum Boost unterscheiden. Um dies zu zeigen, betrachten wir einen Plattenkondensator mit Platten in der xy -Ebene, so dass das elektrische Feld in z -Richtung zeigt.

Im Ruhesystem K vom Plattenkondensator, gilt

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}.$$

Nun lassen wir ein Inertialsystem K' mit Geschwindigkeit v relativ zu K entlang der x -Achse vorbeifahren. In K' ist die Ladungsdichte

$$\sigma' = \frac{Q'}{\Delta x' \Delta y'} = \frac{Q}{\Delta x / \gamma \cdot \Delta y} = \gamma \sigma.$$

Somit folgt

$$E'_\perp = \gamma E_\perp.$$

Wenn wir nun parallel zum Feld boosten, so erhalten wird der Plattenabstand verkürzt, jedoch ist das elektrische Feld unabhängig vom Plattenabstand, so dass

$$E'_\parallel = E_\parallel.$$

Diese beiden Gleichungen sind die sogenannten **EINSTEINGLEICHUNGEN**.

6.1 Felder bewegter Ladungen

Betrachten wir nun eine Punktladung q , welche in K ruht. Dann ist

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}.$$

Nun rast ein Inertialsystem K' mit Geschwindigkeit $-v$ relativ zu K entlang der x -Achse vorbei. Hierbei ist K' das Laborsystem.

Somit gilt mit der Lorentztransformation

$$\begin{aligned} t &= \gamma(t' - \frac{v}{c^2}x') \\ x &= \gamma(x' - vt') \\ z &= z'. \end{aligned}$$

Somit ist das Elektrische Feld in K' gegeben durch

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma x'}{((\gamma x')^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}} \\ E'_y &= \gamma E_y = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma y'}{((\gamma x')^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}} \\ E'_z &= \gamma E_z = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma z'}{((\gamma x')^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Das Feld wird also in Bewegungsrichtung gestaucht.

$$E' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r'^2} \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta^2 \sin^2 \theta')^{\frac{3}{2}}}.$$

Wichtig hierbei ist, dass E' und r' in die selbe Richtung zeigen.

6.2 Beschleunigte Ladungen

Wir wollen nun eine beschleunigte Ladung betrachten. Zunächst betrachten wir eine Ladung welche instantan von $v = 0$ bei $t = 0$ auf v_x beschleunigt wird. Zu einem Beobachtungszeitpunkt T müssen wir nun die Welt in zwei Teile aufteilen, den Bereich ausserhalb von $R = cT$, in welchem die Information das die Ladung verschoben ist noch nicht angekommen ist und innerhalb. Wir wollen die Schale nun genauer anschauen.

Die Feldlinien ausserhalb der Kugel zeigen alle auf den Ursprung und die Feldlinien innerhalb der Kugel, zeigen alle auf die neue Position der Ladung und sind gestaucht. Der Übergang muss so sein, dass das Gauss'sche Gesetz erfüllt ist. Dass dies funktioniert, müssen wir eine transversale Komponente des elektrischen Feldes einführen.

Die analoge Situation haben wir, wenn eine Ladung von v_x auf 0 abgebremst wird. Innerhalb der Kugel zeigen die Feldlinien alle auf die Position der Ladung, ausserhalb der Kugel zeigen die Feldlinien alle auf Position der Ladung bevor sie abgebremst wurde. Wir möchten diesen Fall nun genauer betrachten.

Nehmen wir an, dass wir eine Abbremszeit τ haben, so dass die Ladung von v_x auf 0 abgebremst wird. Dies stellen wir durch eine mittlere Beschleunigung

$$a_x = -\frac{v_x}{\tau}$$

dar. Damit finden wir auch

$$x_0 = v_x \tau - \frac{1}{2} a_x \tau^2 = \frac{1}{2} v_x \tau.$$

Wir wollen nun E_θ als transversale Komponente des elektrischen Feldes betrachten. Nun nehmen wir an, $\tau \ll T$ und $cT \gg x_0$, so dass die Schale dünn ist. Mit geometrischen Überlegungen können wir zeigen, dass

$$\frac{E_\theta}{E_r} = \frac{v_0 T \sin \theta}{c \tau}.$$

Der Radiale Anteil des elektrischen Feldes muss stetig sein, und somit

$$E_r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2}.$$

Somit folgt direkt

$$\begin{aligned} E_\theta &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \frac{v_0 T \sin \theta}{c \tau} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \frac{v_0}{\underbrace{\tau}_{\frac{a}{c}}} \frac{c T \sin \theta}{c^2} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \frac{-a \sin \theta}{c^2}. \end{aligned}$$

Das ist proportional zur Beschleunigung und, das Feld ist proportional zu $\frac{1}{R}$. Die Energiedichte des Feldes lässt sich berechnen durch

$$\begin{aligned} u_\theta &= \frac{\epsilon_0}{2} E_\theta^2 \\ U_{E_\theta} &= \frac{\epsilon_0}{2} \iiint E_\theta^2 dV \\ &= \frac{1}{3 \cdot 4\pi\epsilon_0} \frac{q^2 a^2}{c^3} \tau. \end{aligned}$$

Somit ist die Leistung:

$$P = \frac{U}{\tau} = \frac{1}{3 \cdot 4\pi\epsilon_0} \frac{q^2 a^2}{c^3}.$$

Dies ist die sogenannte halbe Larmor Formel.

Folglich strahlt eine beschleunigte Ladung Energie ab!

Wenn wir eine Kraft auf eine Ladung ausüben durch ein bewegtes E-Feld, so erfährt die Ladung eine Kraft. Es gilt

$$F_{\parallel} = qE_{\parallel} \quad F_{\perp} = qE_{\perp}.$$

Für die Kraft ist es also egal, ob die Ladung sich bewegt oder nicht, es ist also Forminvariant.

6.3 Wechselwirkungen bewegter Ladungen

Betrachten wir einen Leiter, welcher im System K ruht. Wir wissen, dass der Leiter aus Ionen besteht und sich Elektronen mit einer Geschwindigkeit v_0 bewegen. Wir haben eine Linienladungsdichte $\lambda_+ = +\lambda$ und $\lambda_- = -\lambda$. Somit ist die Ladungsdichte im Leiter $\lambda_+ + \lambda_- = 0$, so dass der Leiter elektrisch neutral ist.

Nun fliege ein Elektron mit Geschwindigkeit v relativ, parallel am Leiter vorbei. Hier haben wir nun ein Magnetfeld,

welches durch die Elektronen im Leiter erzeugt wird, so dass das Elektron eine Kraft erfährt. Die Stromdichte ist

$$\mathbf{j} = -nev_0.$$

Und $I = -\lambda v_0$.

Bewegen wir uns nun in das System K_0 der Elektronen im Leiter, so boosten wir mit $\beta_0 = \frac{v_0}{c}$. In diesem System haben die Elektronen eine Ladungsdichte von

$$\lambda_-^0 = \frac{dq}{dx^0} = \frac{dq}{dx \cdot \gamma_0} = -\frac{1}{\gamma_0} \lambda.$$

Bewegen wir uns in das System K' der bewegten Ladung, so erhalten wir einen Boost, $\beta = \frac{v}{c}$. Die Linienladungsdichte der Atomrümpfe wird

$$\lambda'_+ = \frac{dq}{dx'} = \frac{dq}{dx/\gamma} = \gamma \lambda.$$

Für die Elektronen ist es nun ein wenig komplizierter, da sich die Elektronen auch noch bewegen. Hierfür brauchen wir die relativistische Geschwindigkeitsaddition. Aus der additionsformel erhalten wir

$$\beta'_0 = \frac{\beta_0 - \beta}{1 - \beta\beta_0}.$$

Hierbei ist β'_0 die Geschwindigkeit der Elektronen im System K' . Der Gammafaktor der dies erzielt ist

$$\gamma'_0 = \gamma\gamma_0(1 - \beta\beta_0).$$

Proof. Wir wollen das Quadrat davon zeigen. Es gilt

$$\gamma_0'^2 = \frac{1}{1 - \beta_0'^2} = \frac{1}{1 - \frac{(\beta_0 - \beta)^2}{(1 - \beta\beta_0)^2}}.$$

Auf einen gleichen Nenner gebracht, erhalten wir

$$\begin{aligned} \gamma_0'^2 &= \frac{(1 - \beta\beta_0^2)}{(1 - \beta\beta_0)^2 - (\beta_0 - \beta)^2} \\ &= \frac{(1 - \beta\beta_0^2)}{1 - 2\beta\beta_0 + \beta^2\beta_0^2 - \beta_0^2 + 2\beta\beta_0 - \beta^2} \\ &= \frac{(1 - \beta\beta_0)^2}{(1 - \beta^2)(1 - \beta_0^2)} \\ &= \gamma^2\gamma_0^2(1 - \beta\beta_0)^2. \end{aligned}$$

□

In K' der bewegten Punktladung ist somit die Linienladungsdichte der Elektronen

$$\lambda_- = -\frac{\lambda}{\gamma_0} \cdot \gamma'_0 = -\gamma\lambda(1 - \beta\beta_0).$$

Somit ist die Ladungsdichte im System der bewegten Ladung

$$\lambda' = \lambda'_+ + \lambda'_- = \gamma\lambda\beta\beta_0 > 0.$$

Es liegt also eine netto Linienladungsdichte vor. Nach der Formel für das elektrische Feld einer Linienladung, ist das elektrische Feld, welches die bewegte Ladung erfährt, gegeben durch

$$E' = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda'}{r} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\gamma\lambda\beta\beta_0}{r}.$$

Ausserdem erfährt die Ladung eine Kraft von

$$F' = qE' = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\gamma q \lambda \beta \beta_0}{r}.$$

Transformieren wir nun zurück in das System K , so erhalten wir

$$F = \frac{F'}{\gamma} = -\frac{q\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{\beta\beta_0}{r}.$$

Da $I = -\lambda v_0 = -\lambda\beta_0 c$, so erhalten wir

$$F = \frac{I}{2\pi\epsilon_0 c^2 d} \cdot qv.$$

Das erste Ding definieren wir als das Magnetische Feld, so dass

$$B = \frac{I}{2\pi\epsilon_0 c^2 d}.$$

Somit gilt die Lorentzkraft

$$F = qvB.$$

Für einen Draht sehen wir somit auch direkt, dass

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}.$$

Hierbei ist $\mu_0 = \frac{1}{\epsilon_0 c^2}$ die Permeabilität des Vakuums.

7 Magnetische Felder

Analog zum elektrostatischen dq betrachten wir nun ein kleines Stückchen Strom $I dl$. Somit ist $I = v\lambda$. Die Kraft auf einen Leiter durch ein homogenes B-Feld ist gegeben durch

$$d\mathbf{F} = dq(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \lambda dl(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = I(d\mathbf{l} \times \mathbf{B}).$$

Die Kraft auf einen unendlichen geraden Leiter durch ein homogenes B-Feld ist somit

$$\mathbf{F} = I(\mathbf{l} \times \mathbf{B}).$$

Example 7.1: Zwei unendliche Leiter

Wir haben zwei parallele unendliche Leiter, welche einen Abstand d haben. In einem Leiter fließt ein Strom I_1 , im anderen ein Strom I_2 . Wir wollen nun die Kraft berechnen, welche die Leiter aufeinander ausüben.

Die Magnetfelder der Leiter sind gegeben durch

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d}$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi d}.$$

Die Kraft auf Leiter 1 durch das Magnetfeld von Leiter 2 ist gegeben durch

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21} = I_1(\mathbf{l} \times \mathbf{B}_2) = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} \hat{n}.$$

Wir haben zuvor das Ampère'sche Gesetz gesehen:

$$\oint_{\partial A} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I.$$

Example 7.2: B-Feld eines geraden Leiters

Wir wollen nun das B-Feld eines geraden Leiters berechnen. Hierfür verwenden wir das Ampère'sche Gesetz. Wir wählen einen Kreis um den Leiter als Ampereschens Pfad, so dass

$$\oint_{\partial A} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B \oint_{\partial A} dl = 2\pi r B.$$

Somit ist

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\phi}.$$

Mit dem Satz von Stokes können wir das Ampère'sche Gesetz auch schreiben als

$$\oint_{\partial A} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I$$

$$\iint_A (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{a} = \iint_A \mu_0 \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a}.$$

Da dies für jedes A gilt, so muss

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}.$$

Das Magnetische Feld hat also eine Rotation, was sie fundamental vom elektrostatischen Feld unterscheidet.

Ausserdem sind Magnetische Feldlinien im Vergleich zu elektrischen Feldlinien geschlossen, weshalb der netto magnetische Fluss durch eine geschlossene Oberfläche immer 0 ist.

$$\Phi_B = \iint_{\partial V} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = 0.$$

Wenden wir den Satz von Gauss an, so erhalten wir

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0.$$

Lec 19

Eine weitere Gleichung, welche immer gilt ist die Kontinuitätsgleichung,

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

In der Elektrostatik haben wir gefordert, dass $\mathbf{J} = 0$ gilt. In der Magnetostatik hingegen, fordern wir, dass $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ gilt. Wir wollen nun ein Analogon zum Coulomb'schen Kraftgesetz für Magnetische Felder finden.

7.1 Das Vektorpotential

In der Elektrostatik haben wir gesehen, dass aus der verschwindenden Rotation des elektrischen Feldes folgt, dass es ein Skalarpotential ϕ gibt, so dass $\mathbf{E} = -\nabla\phi$. In der Magnetostatik gibt es eine verschwindende Divergenz, was die Existenz eines Vektorpotentials \mathbf{A} impliziert, so dass $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ gilt. Das Vektorpotential wird in Tesla-Meter Tm gemessen.

Wenden wir dies auf das Ampère'sche Gesetz an, so erhalten wir

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J}.$$

Mithilfe einer Formelsammlung können wir die linke Seite umschreiben zu

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}.$$

In der Definition des Vektorpotentials haben wir Ähnlich zum Elektrischen Potential eine Ambiguität, da $\nabla\phi = \nabla(\phi + c)$ für eine Konstante c gilt. Dies nennt sich eine sogenannte **EICHINVARIANZ** woraus wir in der theoretischen Physik die Ladungserhaltung ableiten können. Mit der sogenannten **COULOMB EICHUNG**, welche durch $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ gegeben ist, können wir die Gleichung für das Vektorpotential vereinfachen zu

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}.$$

Diese Gleichung ist analog zu 3 Poisson'schen Gleichungen, so dass die Lösung gegeben ist durch

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'.$$

Wir wollen uns nun fragen, was das Magnetfeld $d\mathbf{B}$ welches durch das gerichtete Stroelement $I d\mathbf{l}$ erzeugt wird, ist. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass unser Stroelement im Ursprung liegt, so dass $\mathbf{r}' = 0$. Somit ist

$$d\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{J} dV = \frac{\mu_0}{4\pi} I d\mathbf{l}.$$

Nun rechnen wir das Magnetfeld durch die Rotation des Vektorpotentials, so dass

$$\begin{aligned} d\mathbf{B} &= \nabla \times d\mathbf{A} = \nabla \times \left(\frac{\mu_0 I}{4\pi r} \cdot d\mathbf{l} \right) \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \nabla \times \left(\frac{d\mathbf{l}}{r} \right). \end{aligned}$$

Nun verwenden wir die Produktregel für die Rotation:

$$\nabla \times (f\mathbf{A}) = f\nabla \times \mathbf{A} + \nabla f \times \mathbf{A}.$$

Anwenden bringt uns zu

$$\begin{aligned} d\mathbf{B} &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left(\underbrace{\nabla \times d\mathbf{l}}_{=0} + \nabla \frac{1}{r} \times d\mathbf{l} \right) \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \nabla \frac{1}{r} \times d\mathbf{l} \\ &= -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \times d\mathbf{l}. \end{aligned}$$

Theorem 7.3: Biot-Savart'sches Gesetz

Das Magnetfeld $d\mathbf{B}$ welches durch ein gerichtetes Stroelement $I d\mathbf{l}$ erzeugt wird, ist gegeben durch

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} (d\mathbf{l} \times \hat{r}).$$

Wir definieren das Magnetische Dipolmoment μ eines Kreisstromes als

$$\mu = I\mathbf{A}.$$

Das Drehmoment welches auf einen Dipol in einem externen Magnetfeld wirkt, ist gegeben durch

$$\tau = \mu \times \mathbf{B}.$$

Ausserdem ist die potentielle Energie eines Dipols in einem externen Magnetfeld gegeben durch

$$U = -\mu \cdot \mathbf{B}.$$

Wir wollen nun das Magnetfeld einer Spule berechnen, was im Grunde aufeinander gelegte Kreisströme sind. So eine Spule ist charakterisiert durch die Windungszahl n , welches die Anzahl der Windungen pro Längeneinheit ist.

Nach längerer Rechnung erhalten wir für das Magnetfeld einer Spule

$$\mathbf{B}_z = -\frac{\mu_0 I n}{2} (\cos \theta_2 - \cos \theta_1).$$

Wichtig dabei ist, dass wir so ein homogenes Magnetfeld in einem Spuleninneren erzeugen können.

Lec 20

Wenn wir einen Strom senkrecht zu einem Magnetfeld haben, so erfährt der Strom eine Kraft, welche senkrecht zum Strom und zum Magnetfeld steht. Somit entsteht eine Spannung zwischen den Seiten des Leiters, welche durch die Lorentzkraft verursacht wird. Dieser Effekt nennt sich **HALL-EFFEKT**. Die Hall-Spannung U_H ist gegeben durch

$$U_H = \frac{IB}{nqA}.$$

Somit kann auch die Ladungsdichte n , sowie das Vorzeichen der Ladung q durch den Hall-Effekt bestimmt werden.

Proof. Wir setzen die Lorentzkraft null und erhalten

$$0 = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \Rightarrow \mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B}.$$

Da die Ladungen am Ende des Leiters gesammelt werden, ist dies ein Kondensator, so dass die Spannung gegeben ist durch

$$U_H = Ed = vBd.$$

Mit $I = vAnq$ erhalten wir die gewünschte Formel. \square

Im 3-Dimensionalen haben wir $I = \mathbf{j} \cdot \mathbf{A}$ mit der Volumendichte \mathbf{j} definiert. Im 2-Dimensionalen, können wir die **FLÄCHENSTROMDICHTEN** \mathbf{K} definieren, so dass $j = \mathbf{v} \cdot \sigma$ gilt. Dies folgt aus

$$j = \frac{I}{l} = \frac{dq}{dtl} = \frac{\sigma lv}{l} = \sigma v.$$

Betrachten wir nun einen Flächenstrom welchen auf uns zukommt. Durch Biot-Savart folgt, dass das Magnetfeld eines solchen Flächenstroms gegeben ist durch

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} (d\mathbf{l} \times \hat{r}).$$

Unter der Annahme, dass r viel kleiner als die Ausdehnung des Flächenstroms ist, so streichen sich die Beiträge der senkrecht zur Platte stehenden Felder weg, sodass das Magnetfeld eines Flächenstroms parallel zur Platte steht.

Für die Stärke des Magnetfelds eines Flächenstroms können wir dann das Ampère'sche Gesetz verwenden, mit einem rechteckigen Amperesch Pfad, so dass

$$\oint_{\partial A} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 2Bl = \mu_0 I = \mu_0 Kl.$$

Ausserdem ist aus Symmetriegründen das Magnetfeld eines Flächenstroms konstant auf beiden Seiten der Platte, so dass

$$B = \frac{\mu_0 K}{2}.$$

Betrachten wir nun einen Plattenkondensator, welcher sich in x -Richtung bewegt. Somit ist das Magnetfeld zwischen den Platten $\mu_0 K \hat{z} = \mu_0 \sigma v_0$. Ausserhalb heben sich die Magnetfelder auf, so dass dort $B = 0$ gilt. Das Elektrische Feld zwischen den Platten ist $E_y = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$.

Dies sind die Formeln im Laborsystem K . Wir führen noch das System K^0 ein, das Ruhesystem des Plattenkondensators, sowie das System K' , welches sich mit Geschwindigkeit v relativ zum Laborsystem bewegt.

In K gilt:

$$E_y = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \\ B_z = \mu_0 v_0 \sigma.$$

In K^0 gibt es den Boost-Vektor $\beta_0 = \frac{v_0}{c}$, so dass

$$\sigma_0 = \frac{\sigma}{\gamma_0} \\ E_y^0 = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\gamma_0 \epsilon_0} \\ B_z^0 = 0.$$

In K' gilt der Boost-Vektor $\beta = \frac{v}{c}$. Die Geschwindigkeit des Plattenkondensators ist durch die relativistische Geschwindigkeitsaddition gegeben durch

$$\beta'_0 = \frac{\beta_0 - \beta}{1 - \beta\beta_0}.$$

Die Ladungsdichte der Platten im System K' ist gegeben durch

$$\sigma' = \gamma'_0 \sigma_0 = \gamma'_0 \frac{\sigma}{\gamma_0}.$$

Wir erinnern uns, dass

$$\gamma'_0 = \gamma\gamma_0(1 - \beta\beta_0).$$

Somit ist

$$\sigma' = \gamma(1 - \beta\beta_0)\sigma.$$

Wir können somit die Flächenstromdichte im System K' berechnen, so dass

$$K' = \sigma' \beta'_0 c = \sigma\gamma(1 - \beta\beta_0) \frac{\beta_0 - \beta}{1 - \beta\beta_0} c = \sigma\gamma c(\beta_0 - \beta).$$

Somit können wir nun die elektrischen und magnetischen Felder im System K' berechnen, so dass

$$E'_y = \frac{\sigma'}{\epsilon_0} = \gamma(1 - \beta\beta_0) \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \gamma(E_y - \frac{\beta}{\epsilon_0 \mu_0 c} B_z) \\ B'_z = \frac{\mu_0 K'}{2} = \frac{\mu_0 \sigma \gamma c}{2} (\beta_0 - \beta) = \gamma(B_z - \beta c \epsilon_0 \mu_0 E_y).$$

Unter der Verwendung von $\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$ können wir dies umschreiben zu

$$E'_y = \gamma(E_y - \beta c B_z) \\ B'_z = \gamma(B_z - \beta \frac{E_y}{c}).$$

Das Ergebnis lässt sich zu den sogenannten **EINSTEIN-GLEICHUNGEN** verallgemeinern, welche die Transformation von elektrischen und magnetischen Feldern unter einem Lorentz-Boost beschreiben. Sie lauten

$$\mathbf{E}'_{\parallel} = \mathbf{E}_{\parallel}, \quad \mathbf{E}'_{\perp} = \gamma(\mathbf{E}_{\perp} + \beta \times c\mathbf{B}) \\ \mathbf{B}'_{\parallel} = \mathbf{B}_{\parallel}, \quad \mathbf{B}'_{\perp} = \gamma(\mathbf{B}_{\perp} - \frac{1}{c}\beta \times \mathbf{E}).$$

Es gibt hier eine gewisse Symmetrie zwischen \mathbf{E} und $c\mathbf{B}$, welche in der theoretischen Physik durch den elektromagnetischen Feldtensor beschrieben wird.

Für den Spezialfall, dass in K die Ladungen in Ruhe sind, folgt

$$E'_{\parallel} = E_{\parallel}, \quad E'_{\perp} = \gamma E_{\perp}.$$

Ausserdem entsteht ein Magnetfeld, welches senkrecht zum elektrischen Feld steht, so dass

$$B'_{\parallel} = 0, \quad B'_{\perp} = \gamma\beta \times \frac{\mathbf{E}_{\perp}}{c}.$$

8 Magnetische Induktion

Induktion heisst das auftreten einer Spannung durch die Änderung eines Magnetfeldes. Genauer, hatten wir bei einer realen Spannungsquelle einen Innenwiderstand r und eine elektromotorische Kraft ε .

Die erste Klasse von Induktion entsteht durch eine relativgeschwindigkeit. Die zweite Klasse von Induktion entsteht durch die zeitliche Änderung eines Magnetfeldes.

Sei unser Laborsystem K mit $\mathbf{B} \parallel \hat{z}$. Ausserdem haben wir einen Leiter, parallel zu \hat{x} , welcher sich mit Geschwindigkeit $\mathbf{v} = v\hat{y}$ bewegt.

Die Ladungen im Leiter erfahren eine Lorentzkraft, welche senkrecht zum Leiter und zum Magnetfeld steht, so dass eine Spannung zwischen den Seiten des Leiters entsteht. Im Gleichgewicht ist die Lorentzkraft null, so dass

$$0 = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \Rightarrow \mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B}.$$

Die Potentialdifferenz zwischen den Seiten des Leiters ist somit gegeben durch

$$U = Ed = vBd.$$

Im Ruhesystem K' des Leiters, gibt es kein Magnetischer Effekt, da die Ladungen im Leiter in Ruhe sind. Das externe elektrische Feld ist jedoch

$$\mathbf{E}'_{\text{ext}} = \gamma(\mathbf{E}_{\perp} + \beta \times c\mathbf{B}).$$

Es gilt $E_{\perp} = 0$, gibt es nur \mathbf{E}'_{int} als Reaktion auf die Lorentzkraft, so dass

$$\mathbf{E}'_{\text{int}} = -\mathbf{E}'_{\text{ext}} = -\gamma\beta \times c\mathbf{B}.$$

Ausserdem ist für das Magnetfeld im Ruhesystem K' des Leiters

$$\mathbf{B}' = \gamma(\mathbf{B} - \frac{1}{c}\beta \times \mathbf{E}) = \gamma\mathbf{B}.$$

Durch das externe elektrische Feld bewegen sich die Ladungen im Leiter, so dass im Gleichgewicht

$$\mathbf{E}'_{\text{int}} + \mathbf{E}'_{\text{ext}} = 0.$$

Das externe Feld ist hierbei nicht konservativ.

Wir definieren die elektromotorische Kraft als

$$\varepsilon = \frac{U_{BA}}{q} = \int_A^B (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{s} = \oint (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{s}.$$

Die allgemeine Definition der elektromotorischen Kraft ist gegeben durch

$$\varepsilon = \oint (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{s}.$$

8.1 Das Faraday'sche Induktionsgesetz

Wir definieren den magnetischen Fluss analog zum elektrischen Fluss als

$$\Phi_B = \iint_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}.$$

Betrachten wir nun unsere Situation von vorher. Dann ist der Fluss durch die Leiterschleife gegeben durch

$$\Phi(t) = \iint_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}.$$

Zum Zeitpunkt $t + dt$ ist der Fluss durch die Leiterschleife gegeben durch

$$\Phi(t + dt) = \iint_{A+dA} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}.$$

Somit finden wir für die Änderung des Flusses

$$d\Phi = \Phi(t + dt) - \Phi(t) = \iint_{dA} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}.$$

Wir können mit $d\mathbf{a} = d\mathbf{s} \times \mathbf{v}dt$ umschreiben, so dass

$$d\Phi = \oint \mathbf{B} \cdot (\mathbf{v} \cdot dt \times d\mathbf{s}).$$

Somit ist

$$\dot{\Phi} = \oint \mathbf{B} \cdot (\mathbf{v} \times d\mathbf{s}).$$

Dies ist ein Spatprodukt, so dass wir es umschreiben können zu

$$\dot{\Phi} = \oint -(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{s} = -\varepsilon.$$

Theorem 8.1: Faraday'sches Induktionsgesetz

Die elektromotorische Kraft ε in einer Leiterschleife ist gleich der negativen zeitlichen Änderung des magnetischen Flusses Φ_B durch die Leiterschleife, so dass

$$\varepsilon = -\frac{d}{dt} \iint_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}.$$

Ableiten von $\Phi = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ bringt uns zu

$$\frac{d\Phi}{dt} = \mathbf{B} \cdot \frac{d\mathbf{A}}{dt} + \frac{d\mathbf{B}}{dt} \cdot \mathbf{A}.$$

Änderung der Fläche entspricht Induktion erster Art, Änderung des Magnetfelds entspricht Induktion zweiter Art.

Betrachten wir nun eine ähnliche Situation wie zuvor, nun ist aber der Stromkreis geschlossen mit einem Widerstand R . Die EMF erzeugt einen Strom I , welcher selbst ein Magnetfeld erzeugt, welches dem ursprünglichen Magnetfeld entgegenwirkt. Dies ist die **LENZ'SCHE REGEL**. Das Magnetfeld wirkt der "der Ursache der Induktion" entgegen, so dass die Energieerhaltung gewährleistet ist.

Somit befindet sich auch ein Strom im bewegten Stab, was eine Biot-Savart Kraft verursacht, welche der Bewegung des Stabes entgegenwirkt. Der Stab erfährt also eine Kraft, welche der Bewegung entgegenwirkt.

Da hier alles Senkrecht aufeinander ist, so ist

$$F_{BS} = IlB = F_{\text{ext}}.$$

Ausserdem ist $I = \frac{\varepsilon}{R}$ und $P = \varepsilon I = F_{\text{ext}}v$, so dass

$$P = IlBv.$$

Wir wollen nun eine Leiterschleife durch das externe Magnetfeld einer Spule bewegen. Dazu sei K das Ruhesystem der Spule, die \mathbf{B} erzeugt und K' das Ruhesystem der Leiterschleife, welche sich mit Geschwindigkeit \mathbf{v} , mit dem Leiter zusammen bewegt. Dann können wir die Einsteingleichungen verwenden. Da wir wlog in K nur ein Magnetfeld haben, so ist

$$\begin{aligned}\mathbf{E}'_{\perp} &= \gamma \mathbf{v} \times \mathbf{B}_{\perp} \\ \mathbf{B}'_{\perp} &= \gamma \mathbf{B}_{\perp}.\end{aligned}$$

Im Laborsystem K ist die EMF gegeben durch

$$\varepsilon = \oint (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{s} = -(B_2 - B_1)lv.$$

Wenn wir nun die Flussänderung berechnen, so erhalten wir

$$\dot{\Phi} = \frac{d}{dt} \iint_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = (B_2 - B_1)lv.$$

Im Ruhesystem K' der Leiterschleife, gibt es kein Magnetischer Effekt, da die Ladungen im Leiter in Ruhe sind. Das externe elektrische Feld ist jedoch

$$\mathbf{E}'_{\text{ext}} = \gamma(\mathbf{v} \times \mathbf{B}).$$

Somit ist

$$\varepsilon' = \oint \mathbf{E}'_{\text{ext}} \cdot d\mathbf{s} = \gamma\varepsilon.$$

Wenn wir die Flussänderung berechnen, so erhalten wir

$$\dot{\Phi}' = \frac{d}{dt} \iint_A \mathbf{B}' \cdot d\mathbf{a} = \gamma\dot{\Phi}.$$

Wir wollen nun noch die differentielle Form des Faraday'schen Induktionsgesetzes herleiten. Wir verwenden den Satz von Stokes, so dass

$$\iint_A \nabla \times \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \oint_{\partial A} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \iint_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = -\iint_A \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a}.$$

Da dies für jedes A folgt das Faraday'sche Induktionsgesetz

Theorem 8.2: Differentialform des Faraday'schen Induktionsgesetzes

Die Rotation des elektrischen Feldes ist gleich der negativen zeitlichen Änderung des magnetischen Feldes.

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

Lec 23

8.2 Gegenseitige Induktivität

Wenn wir zwei Stromschleifen haben, und in einer sich der Strom erhöht, so induziert dies eine Spannung in der anderen Schleife.

$$\varepsilon_{21} = -\frac{d\Phi_{21}}{dt} = -\frac{d}{dt} \iint_{A_2} \mathbf{B}_1(I_1) \cdot d\mathbf{a}..$$

Definieren wir nun die sogenannte **GEGENSEITIGE INDUKTIVITÄT** M_{21} durch

$$M_{21} = \frac{\Phi_{21}}{I_1}.$$

So wird dies zu

$$\varepsilon_{21} = -M_{21} \frac{dI_1}{dt}.$$

Die gegenseitige Induktivität M_{21} ist eine geometrische Größe, welche von der Form und der Anordnung der beiden Schleifen abhängt. Die Einheit des Flusses ist Vs so dass die Einheit der gegenseitigen Induktivität Ω s oder Henry H ist.

Es gilt ausserdem, dass $M_{21} = M_{12}$ gilt, was sich durch die Symmetrie der Anordnung der beiden Schleifen erklären lässt.

8.3 Selbstinduktivität

Betrachten wir nun eine einzelne Stromschleife, in welcher sich der Strom erhöht. Dadurch entsteht eine Flussänderung in der Schleife selbst. Die so induzierte Spannung wirkt der Änderung des Stroms entgegen. Dieser Prozess wird als **SELBSTINDUKTIVITÄT** bezeichnet. Dies ist quasi das $M_{11} =: L$.

Alle reellen Schaltkreise, insbesondere Spulen haben eine Selbstinduktivität. Die Selbstinduktivität eines Stromkreises wird immer idealisiert beschrieben. Eine reale Spule ist somit eine Serienschaltung aus einer idealen Spule und einem Widerstand. Die induzierte EMF ist somit

$$\varepsilon = -L \frac{dI}{dt}.$$

Bauen wir dies nun in einen Schaltkreis ein. Zunächst betrachten wir einen Stromkreis mit Spannungsquelle ε_0 , Spule L und Widerstand R in Serie. Ausserdem haben wir noch einen Schalter.

Anwenden der Kirchhoffschen Regeln bringt uns zu

$$\varepsilon_0 - L \frac{dI}{dt} - RI = 0.$$

Schliessen wir nun den Schalter bei t_0 , finden wir, dass

$$I = \frac{\varepsilon_0}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}(t-t_0)}\right).$$

Somit ist die Zeitkonstante $\tau = \frac{L}{R}$.

Öffnen wir den Schalter wieder bei $t_1 \gg t_0$, so ist $\frac{d\Phi}{dt} \rightarrow \infty$ und somit $\varepsilon \rightarrow \infty$. Dies ist der Grund, weshalb man eine Schutzdiode parallel zur Spule schaltet, damit die induzierte Spannung nicht zu gross wird.

Aufstellen der Kirchhoffschen Regeln für den Fall, dass der Schalter geöffnet ist, bringt uns zu

$$-L \frac{dI}{dt} - RI = 0.$$

Und somit durch lösen der DGL zu

$$I = I_0 e^{-\frac{R}{L}(t-t_1)}.$$

Wir möchten nun die Induktivität einer Spule genauer anschauen. Für die Induktivität einer Spule gilt zunächst, dass

$$B = \mu_0 \frac{N}{l} I.$$

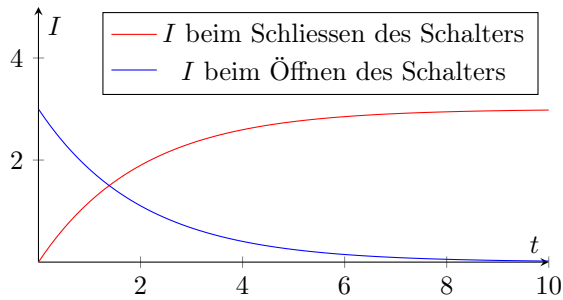


Abbildung 2: Zeitlicher Verlauf des Stroms I beim Schliessen und Öffnen des Schalters

Somit ist der Fluss durch die Spule gegeben durch

$$\Phi = BA = \mu_0 \frac{N}{l} IA \cdot N.$$

Die Selbstinduktivität der Spule ist somit

$$L = \frac{\Phi}{I} = \mu_0 \frac{A}{l} N^2.$$

Wir können nun auch noch die Energie betrachten, welche in der Induktivität gespeichert wird. Für den Stromfluss nach dem Öffnen des Schalters, fließt noch Strom und im Widerstand wird Leistung $P = \varepsilon_{\text{ind}} I$ umgesetzt. Die Energie welche in der Induktivität gespeichert ist, ist somit

$$U = \int_{t_1}^{\infty} P dt = - \int_{t_1}^{\infty} L \frac{dI}{dt} I dt = \frac{1}{2} LI_0^2.$$

Verwenden von $I_0 = \frac{Bl}{\mu_0 N}$ bringt uns zu, wobei $V = Al$ die Volumen der Spule ist,

$$U = \frac{1}{2\mu_0} VB^2.$$

Die Energiedichte eines Magnetfelds ist somit gegeben durch

$$u_B = \frac{U}{V} = \frac{1}{2\mu_0} B^2.$$

Diese Formel gilt im allgemeinen nicht nur für Spulen, sondern generell.

Bemerke, dass diese Formel analog zur Energiedichte eines elektrischen Felds $u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$ ist, was die Symmetrie zwischen elektrischen und magnetischen Feldern unterstreicht.

9 Wechselströme

Wir wollen analysieren, wie C und L den Strom in Wechselstromkreisen beeinflussen. Wir haben somit $V(t), I(t)$. Generell ist der Strom $I(t)$ die Antwort des Kreises auf den Treiber, welcher eine EMF ist. Insbesondere schauen wir uns die Amplitude und die Phase des Stroms an.

Dafür betrachten wir zunächst einen freien, gedämpften RLC Stromkreis. Dieser besteht aus einem Widerstand R , einer Spule L und einem Kondensator C in Serie.

Wir können uns analog eine Masse m , eine Federkonstante k und eine Dämpfungskonstante κ vorstellen.

Tabelle 3: Vergleich RLC und Masse-Feder-Dämpfer System

	RLC	MFD
Amplitude	V	x
E max Amplitude	im Kondensator	in der Feder
E Amplitude 0	in der Spule	in der Masse
Dämpfung	R	κ

Wir stellen nun die DGL auf. Die Ladung auf C ist $Q = C \cdot V$. Der Strom ist somit $I = -\dot{Q} = -C\dot{V}$. Anwenden von Kirchhoff bringt uns zu

$$V - L\dot{I} - RI = 0.$$

Einsetzen von $I = -C\dot{V}$ bringt uns zu

$$\ddot{V} + \frac{R}{L}\dot{V} + \frac{1}{LC}V = 0.$$

Das ist einfach eine gedämpfte harmonische Schwingung weshalb die Lösung gegeben ist durch

$$V(t) = V_0 e^{-\frac{R}{2L}t} \cdot \cos(\omega t).$$

Ausserdem ist $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ die Eigenfrequenz des Systems, und $\rho = \frac{R}{2L}$ die Abklingkonstante und

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \rho^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}.$$

Analog zum mechanischen Oszillator gibt es die schwache Dämpfung ($\rho < \omega_0$), die starke Dämpfung ($\rho > \omega_0$) und die kritische Dämpfung ($\rho \approx \omega_0$). Die Energie des Systems schwingt hier zwischen dem E und B Feld hin und her. Es gibt hier 4 Fälle.

1. Wir haben maximale Spannung über dem Kondensator. E ist maximal, B ist null. Somit ist $V = \frac{Q}{C}$, $I = 0$ und $U = \frac{1}{2}CV^2$.

2. Wir haben maximale Stromstärke durch die Spule. E ist null, B ist maximal. Somit ist $V = 0$, I maximal und $U = \frac{1}{2}LI^2$.

3. Wir haben minimale Spannung über dem Kondensator. E ist minimal, B ist 0. Es ist $V = -\frac{Q}{C}$, $I = 0$ und $U = \frac{1}{2}CV^2$.

4. Wir haben minimale Stromstärke durch die Spule. E ist null, B ist maximal. Es ist $V = 0$, I minimal und $U = \frac{1}{2}LI^2$.

Es stellt sich nun die Frage, wie ein Wechselstromgenerator funktioniert. Ein Wechselstromgenerator besteht aus einem Magneten, in dessen Magnetfeld sich eine Leiterschleife mit Winkelgeschwindigkeit ω dreht.

Der Fluss durch diese Spule ist

$$\Phi = BA \cos(\omega t).$$

Die EMK ist somit gegeben durch

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \sin(\omega t) = BA\omega \sin(\omega t).$$

Das Prinzip lässt sich auch umkehren, so dass wir einen Motor bauen können. Wenn ein Strom durch die Leiterschleife fließt, so entsteht ein magnetisches Moment, welches mit dem Magnetfeld wechselwirkt, so dass ein Drehmoment entsteht, welches die Leiterschleife in Rotation versetzt.

Für die potentielle Energie eines magnetischen Dipols in einem Magnetfeld gilt

$$\Delta U = W = \int_0^\theta \tau d\theta' = \int_0^\theta \mu B \sin(\theta') d\theta' = -\mu B \cos(\theta).$$

Wählen wir den Nullpunkt nun bei $\theta = \frac{\pi}{2}$, so dass $U(0) = 0$ gilt, so erhalten wir

$$U_{\max} = \mu B \quad U_{\min} = -\mu B.$$

9.1 Wechselstromkreise

Die Schaltelemente im Wechselstromkreise sind Widerstand, Kapazitäten und Induktivitäten. Die Spannungsabfälle sind gegeben durch

Tabelle 4: Vergleich der Spannungsabfälle über Widerstand, Kapazität und Induktivität

Widerstand	$V_R = IR$
Kapazität	$V_C = \frac{Q}{C}$
Induktivität	$V_L = -L \frac{dI}{dt}$

Sei zunächst $C = 0$. Dann ist gegeben $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cos(\omega t)$. Die EMF treibt nun einen Strom I durch die Spule und den Widerstand, so dass mit Kirchhoff 2 folgt

$$\varepsilon(t) - L \frac{dI}{dt} - RI = 0.$$

Umsortieren in die Standardform bringt uns zu

$$L\dot{I} + RI = \varepsilon_0 \cos(\omega t).$$

Wenn wir diese Differentialgleichung lösen, so erhalten wir als Ansatz

$$I(t) = I_0 \cdot \cos(\omega t + \alpha).$$

Einsetzen in die DGL bringt uns zu

$$-LI_0\omega \sin(\omega t + \alpha) + RI_0 \cos(\omega t + \alpha) = \varepsilon_0 \cos(\omega t).$$

Verwenden der Additionstheoreme für Sinus und Kosinus bringt uns zu

$$\begin{aligned} -\sin(\omega t)[2I_0\omega \cos(\alpha) + RI_0 \sin(\alpha)] &= 0 \\ -\cos(\omega t)[2I_0\omega \sin(\alpha) - RI_0 \cos(\alpha) + \varepsilon_0] &= 0. \end{aligned}$$

Auflösen bringt uns zu

$$\begin{aligned} \alpha &= \arctan\left(-\frac{\omega L}{R}\right) \\ I_0 &= \frac{\varepsilon_0}{R} \cdot \cos(\alpha) = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}. \end{aligned}$$

Wir sehen, dass $\alpha < 0$ gilt, so dass der Strom dem Treiber hinterherhinkt. Ausserdem ist die Amplitude des Stroms von der Phasenverschiebung abhängig.

Lec 24

Als Nebenbemerkung, in der aktuellen Diskussion gehen wir von quasistationären Strömen aus, also Wechselstromfrequenzen, kleiner als 1000 Hz aus.

Wir wollen dies nun für den RC-Stromkreis wiederholen. Der DGL ist gegeben durch

$$\varepsilon(t) + \frac{Q}{C} - RI = 0.$$

Wir verwenden den analogen Ansatz wie zuvor, so dass

$$I(t) = I_0 \cdot \cos(\omega t + \alpha).$$

Es gilt $I = -\dot{Q}$, wobei das Minuszeichen daher kommt, dass der Kondensator entladen wird. Als Konvention nehmen wir an, dass wenn Ladung von der + zur - Platte fließt (entladen), dann ist I negativ.

Einsetzen in die DGL bringt uns zu

$$\frac{I_0}{\omega C} \sin(\omega t + \alpha) + RI_0 \cos(\omega t + \alpha) = \varepsilon_0 \cos(\omega t).$$

Verwenden der Additionstheoreme und auflösen bringt uns zu

$$\begin{aligned} \alpha &= \arctan\left(-\frac{1}{\omega RC}\right) \\ I_0 &= \frac{\varepsilon_0}{R} \cdot \cos(\alpha) = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}}. \end{aligned}$$

Wir haben also einen kapazitiven Widerstand $Z_C = \frac{1}{\omega C}$. Ausserdem ist $\alpha > 0$ so dass der Strom dem Treiber vorausseilt.

Strom eilt vor am Kondensator.

Strom zu spät an der Induktivität. (R. Wallny)

Einen kapazitiven Widerstand Z_C wird auch ein Hochpass und ein induktiven Widerstand Z_L wird auch ein Tiefpass genannt, da Z_C für grosse Frequenzen klein und Z_L für kleine Frequenzen klein ist.

Ein getriebener RLC-Stromkreis hat eine Resonanzfrequenz $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. Der Gütefaktor Q ist gegeben durch

$$Q = \frac{L\omega_{\max}}{R} = R\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Wir wollen einen Stromkreis nun mit komplexen Zahlen analysieren. Wir haben also eine angelegte EMF $V = \varepsilon_0 e^{i\omega t}$. Dies ist die aufgeprägte Störung. Die komplexe Stromantwort ist

$$I = I_0 e^{i(\omega t + \alpha)}.$$

Wir kennen dies vom Gleichstrom, wo $V = IR$ gilt. Wir können dies nun verallgemeinern. Dazu schreiben wir $I = \frac{1}{R}V$. Die Verallgemeinerung ist dann

$$I = YV.$$

Hierbei ist Y die sogenannte **ADMITTANZ**, welche den Leitwert verallgemeinert. Analog definiert man $Z = \frac{1}{Y}$ als die sogenannte **IMPEDANZ**.

Wir wollen die Admittanz schreiben als $Y = Y_0 e^{i\varphi}$. Y_0 ist der Betrag und φ die Phase der Admittanz. Es gilt

$$Y_0 e^{i\varphi} = Y_0 \cos(\varphi) + iY_0 \sin(\varphi).$$

Ausserdem ist

$$\tan(\varphi) = \frac{\Im(Y)}{\Re(Y)} \quad \bar{Y} = Y_0 e^{-i\varphi}.$$

Ausserdem gilt

$$Y\bar{Y} = Y_0^2 = \Re(Y)^2 + \Im(Y)^2$$

und

$$Y^{-1} = \frac{1}{a + ib} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} = \frac{\bar{Y}}{|Y|^2}.$$

Für den RL Stromkreis haben wir gesehen, dass $\tan(\alpha) = -\frac{\omega L}{R}$ gilt und $I_0 = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$ gilt.

Für $R \rightarrow 0$ haben wir $\alpha \rightarrow -\frac{\pi}{2}$ und $I_0 \rightarrow \frac{\varepsilon_0}{\omega L}$. Somit können wir schliessen, dass

$$I_L = Y_L V \Rightarrow I_0 e^{i(\omega t - \frac{\pi}{2})} = Y_0 e^{i\varphi} \varepsilon_0 e^{i\omega t}.$$

Kürzen von $e^{i\omega t}$ bringt uns zu den beiden Zusammenhängen

$$Y_0 = \frac{\varepsilon_0}{I_0} = \frac{1}{\omega L}, \quad \varphi = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow e^{i\varphi} = -i.$$

Somit ist die Admittanz eines Induktors gegeben durch

$$Y_L = -\frac{i}{\omega L}.$$

Ausserdem ist die Impedanz eines Induktors gegeben durch

$$Z_L = \frac{1}{Y_L} = i\omega L.$$

Analog für den Kondensator finden wir

$$Y_C = i\omega C, \quad Z_C = \frac{1}{Y_C} = -\frac{i}{\omega C}.$$

Dies ist nun super praktisch, da wir die gleichen Gesetze wie im Gleichstrom mit Widerständen verwenden können. Bei einer Parallelschaltung von L, R und C ist zum Beispiel

$$|I| = \varepsilon_0 \sqrt{\frac{1}{R^2} + (\omega C - \frac{1}{\omega L})^2}.$$

Und

$$\tan(\alpha) = R\omega C - \frac{R}{\omega L}.$$

9.2 Leistungsaufnahme

Bei Gleichstromkreisen ist die Leistung $P = IV$. Dies gilt auch im Wechselstromkreis, Hier können wir jedoch nicht mit komplexen Zahlen rechnen, da

$$\Re(IV) \neq \Re(I)\Re(V).$$

Die durchschnittliche Leistung über eine Periode T ist gegeben durch

$$\langle VI \rangle_T := \frac{1}{T} \int_0^T V_0 \cos(\omega t) I_0 \cos(\omega t + \alpha) dt.$$

Verwenden des Additionstheorems für Kosinus bringt uns zu

$$\langle VI \rangle_T = \frac{1}{2} V_0 I_0 \cos(\alpha).$$

Der Term $\cos(\omega t + \alpha)$ beschreibt, wie die Leistung um ihren Mittelwert schwingt.

Dies ist der Grund, weshalb wir bei Wechselstromkreisen nur ein Teil von VI als Leistung abgegeben werden kann. Ein gewisser Teil der Leistung wird in die Spannungsquelle zurückgespeist.

Man spricht in der Praxis häufig von Effektivspannungen und Effektivstrom

$$V_{\text{eff}} = \frac{V_0}{\sqrt{2}}, \quad I_{\text{eff}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}.$$

9.3 Der Transformator

Ein **TRANSFORMATOR** ist ein Gerät, welches Spannungen transformieren kann. Das Ziel ist es, die Leistung optimal zu transportieren. Wenn wir ein Kabel haben, hat dieses einen Ohmschen Widerstand R_K . Der Spannungsabfall ΔV ist gegeben mit $\Delta V = IR_K$. Der Relative Verlust ist somit

$$\frac{\Delta P_{el}}{P_{el}} = \frac{\Delta VI}{VI} = \frac{I^2 R_K}{VI} = \frac{P_{el}}{V^2} R_K.$$

Dies würde nahelegen, möglichst hohe Spannungen zu verwenden, um die Verluste zu minimieren. Dies wird durch den Transformator ermöglicht, welcher die Spannung hochtransformieren kann. Dabei haben wir zwei Spulen mit unterschiedlicher Windungszahl.

Es zeigt sich, dass $\frac{V_1}{V_2} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{I_2}{I_1}$.

Lec 25

Im Primärkreis haben wir eine Wechselspannung. Nehmen wir an, wir haben $I_p > 0$. Dadurch entsteht ein Magnetfeld, welches auch in der zweiten Spule einen Strom induziert. Aufgrund der Lenzschen Regel ist dieser Strom so gerichtet, dass er dem Primärstrom entgegenwirkt. Somit ist I_s negativ, so dass I_p und I_s in entgegengesetzte Richtungen fließen. Wir wollen ihn dennoch als positiv betrachten.

10 Maxwellgleichungen

Es stellt sich die Frage, wie Ströme durch Kondensatoren fließen können. Bisher haben wir folgendes gesehen

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J}.\end{aligned}$$

Wenn wir nun die Divergenz der vierten Gleichung nehmen, so erhalten wir

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{B} = 0.$$

Auf der rechten Seite erhalten wir jedoch

$$\nabla \cdot (\mu_0 \mathbf{J}) = \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{J} = -\mu_0 \frac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0.$$

Aus Symmetrie fehlt irgendwie ein $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$.

In Integralform sagt Ampère, dass

$$\oint_{\partial A} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \iint_A \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a}.$$

Wenn wir nun einen Plattenkondensator haben, so können wir eine Fläche A um einen Teil des Kabels legen. Jedoch können wir mit dem selben Rand ∂A auch eine Fläche A' um die Platten legen. Auf der einen Seite haben wir also einen Strom, auf der anderen Seite haben wir keinen Strom, so dass die Ampèresche Gleichung nicht mehr gilt.

Bei einem Plattenkondensator haben wir

$$\mu_0 I = \mu_0 \frac{dQ}{dt} = \mu_0 A \frac{d\sigma}{dt} = \mu_0 \varepsilon_0 A \frac{\partial E}{\partial t}.$$

Wir definieren somit den **MAXWELLSCHEN VERSCHIEBUNGSSTROM** als

$$\mathbf{J}_V = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

Somit wird das Ampèresche Gesetz zum Maxwell-Ampère Gesetz.

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{J} + \mathbf{J}_V) = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

Wir können nun auch die Kontinuitätsgleichung aus den Maxwellgleichungen herleiten. Ableiten der ersten Gleichung bringt uns zu

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow \nabla \cdot \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Einsetzen in die Divergenz der vierten Gleichung bringt uns zu

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0.$$

Umformen bringt uns zu

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Somit sind wir bei den Maxwellgleichungen angekommen.

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.\end{aligned}$$

10.1 Elektromagnetische Wellen

Weit von Quellen entfernt, dürfen wir $\rho = 0$ und $\mathbf{J} = 0$ annehmen. Somit reduzieren sich die Maxwellgleichungen zu

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.\end{aligned}$$

Diese werden auch die Homogenen Maxwellgleichungen genannt. Nehmen wir die Rotation der dritten Gleichung, so erhalten wir

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{B} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}.$$

Also gibt das

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0.$$

Dies ist die Wellengleichung für das elektrische Feld. Ausserdem ist

$$\mu_0 \varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}.$$

Analog für die magnetischen Felder erhalten wir

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0.$$

Es lässt sich zeigen, dass das E und B Feld transversale Wellen bilden, welche senkrecht zueinander und zur Ausbreitungsrichtung stehen.

Wir bemerken, dass eine Elektromagnetische Welle Energie transportiert. Die mechanische Energiedichte war definiert als $u = \frac{dW}{dV}$. Die Intensität war dann definiert als $I = \frac{dW}{dAdt} = u \cdot v$. Ausserdem hatten wir die Energieflussdichte definiert als $\mathbf{S} = u\mathbf{v}$.

Für die elektromagnetische Welle ist die Energiedichte gegeben durch

$$u = u_E + u_B = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 = \frac{B^2}{\mu_0} = \varepsilon_0 E^2.$$

Hierbei haben wir $E = cB$ verwendet. Ausserdem folgt

$$u = \frac{E \cdot B}{\mu_0 c}.$$

Die Energieflussdichte ist somit gegeben durch

$$\mathbf{S} = u\mathbf{v} = \frac{E \cdot B}{\mu_0 c} \cdot c\hat{k} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B}.$$

Dies wird auch als **POYNTING-VEKTOR** bezeichnet.

Index

- 4-er Abstand, 16
- Admittanz, 27
- Boost, 14
- Coulomb Eichung, 21
- destruktive Interferenz, 4
- Dispersion, 1
- Eichinvarianz, 21
- Eigenzeit, 14
- Einsteingleichungen, 18, 22
- elektrischer Strom, 11
- Elektromotorische Kraft, 12
- Flächenstromdichte, 22
- Gangunterschied, 4
- gegenseitige Induktivität, 24
- Hall-Effekt, 21
- idealen Leiter, 11
- Impedanz, 27
- Influenz, 6
- Joule'sche Wärme, 12
- konstruktive Interferenz, 4
- kontravarianter Vektor, 13
- kovariante Vektor, 13
- Ladungen, 6
- Lenz'sche Regel, 23
- Linkszirkular, 3
- longitudinal, 1
- Longitudinale Dopplereffekt, 17
- Lorentz Transformation, 15
- Längenkontraktion, 15
- Magnetfeld, 18
- Massenbelag, 2
- Maxwellschen Verschiebungsstrom, 28
- Minkowski Raum, 16
- Nullphasenwinkel, 1
- permeabilität des Vakuums, 18
- Phase, 1
- Phasenflächen, 2
- Phasengeschwindigkeit, 1
- Poynting Vektor, 4
- Poynting-Vektor, 28
- realen Leiter, 11
- Rechtszirkular, 3
- Ruhemasse, 17
- Selbstinduktivität, 24
- Transformator, 27
- transversal, 1
- Transversalen Dopplereffekt, 17
- Welle, 1
- Wellenfronten, 2
- Wellenlänge, 1
- Wellenvektor, 2
- Wellenzahl, 1
- Zeitdilatation, 14
- Zugspannung, 2
- Äquipotentialfläche, 9
- Äthers, 14